PROPOSTAS, EXPERIMENTAÇÕES E ANÁLISES DE METODOLOGIAS E DE RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Daniela Silva Braz [1]
Deivyson Santos Guimaraes
Maria Carolina Rocha Nunes
Matheus Silva Assis
Rita de Kassia Ferrari Sobrinho
Valdeane Silva Ribeiro[2]
Wanderleya Nara Gonçalves Costa[3]

Resumo:
A especificidade da profissão docente aponta para a importância da pesquisa, da inovação, do constante diálogo entre Universidade e escola e do exercício reflexivo acerca das práticas pedagógicas. Contribuindo neste sentido, o texto apresenta um conjunto de experiências vivenciadas num curso do licenciatura em matemática, por meio do qual exercitamos o compartilhamento e a reflexão acerca de práticas relativas ao ensino de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio. O trabalho privilegiou narrativas, histórias de formação, de constituição de saberes e de práticas e, nas análises, buscamos captar os sentidos dos diferentes registros de um grupo de licenciandos. Consideramos que o resultado do trabalho se configura como uma proposta para que o ensino de matemática seja cuidado e reinventado, fortalecido pelo movimento colaborativo de pensar a prática e reinventá-la.
Palavras-chave: Práticas docentes. Licenciatura em Matemática. Matemática na Educação Básica.

PROPUESTAS, EXPERIMENTOS Y ANÁLISIS DE METODOLOGÍAS Y RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS

Resumen:
La especificidad de la profesión docente señala la importancia de la investigación, la innovación, el diálogo constante entre la universidad y la escuela y el ejercicio reflexivo sobre las prácticas pedagógicas. Contribuyendo en este sentido, el texto presenta un conjunto de experiencias vividas en un curso de grado en matemáticas, a través del cual ejercemos el intercambio y la reflexión sobre prácticas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en los últimos años de la escuela primaria y secundaria. El trabajo privilegiaba narrativas, historias de formación, constitución de conocimientos y prácticas; en los análisis, buscamos capturar los significados de los diferentes registros de un grupo de estudiantes universitarios. Consideramos que el resultado del trabajo se configura como una propuesta para que la enseñanza de las matemáticas sea cuidada y reinventada, fortalecida por el movimiento colaborativo de pensar la práctica y reinventarla.
Palabras clave:
Prácticas docentes. Licenciatura en Matemáticas. Matemáticas en la Educación Básica.

[1] Discente em Licenciatura em Matemática CUA/UFMT. E-mail: danii.ela.braz@gmail.com
[2] Licencianda em Matemática pela UFMT\CUA. E-mail: flordelizbg25@gmail.com
[3] Doutora em Educação Matemática pela USP. Professora do CUA/UFMT. E-mail: wannara@ufmt.br

Considerações Iniciais

Ainda hoje são muitos os educandos que consideram a matemática uma disciplina difícil e abstrata. Talvez essa percepção seja herança de uma prática docente que a apresentava como uma ciência pronta e acabada, a ser aprendida por meio da memorização de regras e da repetição de exercícios. Entretanto, na atualidade, é sugerido o uso de metodologias e de recursos didáticos variados como contributos aos processos de ensinar e aprender matemática, cabendo-lhes, mediados pelo professor, favorecer a compreensão e a construção do conhecimento por parte dos estudantes.

Acerca das metodologias para o ensino da matemática, D'Ambrosio (1989) sugere o uso da resolução de problemas, da modelagem, da etnomatemática, da história da matemática, dentre outras. Em comum, tais metodologias procuram gerar situações que estimulem a curiosidade dos estudantes e permitam que o estudo da matemática ocorra de modo criativo, por meio da vivência de investigações e pela exploração de problemas. Nesse contexto, os recursos didáticos têm papel fundamental, seja na mobilização para o conhecimento, na construção do conhecimento e/ou na elaboração da síntese do conhecimento (VASCONCELLOS apud ANASTASIOU, 2006, p. 31-33).

Na aplicação das diferentes metodologias, além dos tradicionais quadro negro e livro didático, sugere-se que os professores de matemática utilizem jornais, revistas, jogos, literatura, vídeos, músicas, artes plásticas, softwares, dentre vários outros recursos didáticos. Zabala (1998) explica que todos os meios que o professor aplica na ação educativa para promover o desenvolvimento do processo cognitivo são recursos didáticos. Por sua vez, Passos (2009, p.78) assinala que "os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem".

Essa diversidade impõe escolhas e, para isso, o professor precisa desenvolver saberes e competências para sua análise e uso e, até mesmo, para a elaboração de novos recursos, face aos conteúdos, aos objetivos e aos resultados esperados. No curso de Licenciatura em Matemática do CUA/UFMT, a busca por auxiliar os licenciandos na construção desses saberes ocorre por várias vias, seja pela participação em atividades de disciplinas obrigatórias do Curso, seja em projetos de extensão ou em programas como o PET Matemática (Programa de Educação Tutorial). Nesse artigo, resgatamos algumas das produções dos estudantes do Curso e focamos um olhar inquisitivo acerca delas.

Segundo Rezende (1990), a pesquisa em educação deve apresentar três momentos. O primeiro é o momento de *constatação*; trata-se de constatar a realidade com um levantamento adequado dos dados, em vista de uma descrição suficiente e significativa da situação que foi escolhida como objeto de pesquisa. O segundo momento, de *compreensão*, refere-se a olhar o fenômeno procurando evidenciar relações de aproximação ou de afastamento entre fatores contextuais, representações e percepções dos sujeitos e elementos teóricos. O último momento, chamado de *projeção-prospectiva*, trata de uma ampliação do olhar acerca da própria prática docente que, ao ser compartilhada, torna-se mais visível e assumida, e, portanto, mais sujeita à problematização e à mudança no/do contexto educacional.

Ao apresentar nossas experiências e reflexões, as organizamos em duas seções, uma voltada para a matemática das séries finais do ensino fundamental e outra para o ensino médio.

Na seção voltada para o ensino fundamental, inicialmente, apresentamos as considerações acerca de uma oficina sobre condições de existência de um triângulo, na qual a metodologia de resolução de problemas foi aplicada e palitos de madeira foram utilizados como recursos didáticos. Em seguida, expomos nossas considerações sobre uma proposta de ensino-aprendizagem que, utilizando vídeo/novas tecnologias, associou o conteúdo de frações à leitura de partituras.

Ao nos referirmos às propostas para o ensino médio, discutimos a criptografia como uma possibilidade de aplicação da modelagem matemática enquanto metodologia de ensino. Em seguida, recorremos a temas interessantes da topologia, observados à luz da história da matemática, para elaborar mais uma proposta para o ensino médio.

1. Propostas para o Ensino Fundamental

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está prevista na Constituição de 1988 e no Art. 26 da Lei de Diretrizes e Bases de 1996 (LDB 9394/96) para o Ensino Fundamental, e ampliado no PNE conforme a Lei nº 13.005/2014 para o Ensino Médio. É ela que designa os direitos, os conhecimentos, as competências e, também, os objetivos de aprendizagem das disciplinas curriculares, apontando o que todos os estudantes brasileiros precisam aprender, ano após ano, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Na BNCC de Matemática para o Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas nos seguintes campos: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. No documento se afirma:

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. (BNCC, 2017, p. 272)

1.1 A geometria e os palitos: explorando triângulos.

Para uma melhor compreensão dos conceitos geométricos, tem-se feito uso da metodologia de resolução de problemas apoiada por materiais manipulativos elaborados com materiais de baixo custo e fácil acesso, como os palitos de madeira que utilizamos no oitavo ano da Escola Estadual Irmã Diva Pimentel, em Barra do Garças/MT, numa oficina pedagógica para trabalhar o conteúdo de triângulos. A respeito da metodologia utilizada, D'Ambrosio (1989, p. 17) explica que:

> A resolução de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos. Essa proposta, mais atual, visa a construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a sua curiosidade matemática. Através de suas experiências com problemas de naturezas diferentes o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explicá-lo dentro de sua concepção da matemática envolvida.(...) Nesse processo o aluno envolve-se com o "fazer" matemática no sentido de criar hipóteses e conjecturas e investigá-los a partir da situação problema proposta.

Na oficina a ser descrita, o objetivo geral do trabalho foi levar cada estudante a reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados. Foram determinados ainda os seguintes objetivos específicos: a) Desenvolver o raciocínio lógico; b) Promover troca de informações de uma maneira mais interativa, lúdica e dinâmica; c) Revisar conteúdos matemáticos; d) Explorar e dinamizar alguns conceitos matemáticos; e) Possibilitar a percepção da diversidade de estratégias na resolução de problemas matemáticos; f) Estimular estratégias de grupo e trabalho em equipe (colaboração e solidariedade) na aprendizagem da matemática.

Nossa função foi auxiliar o professor na aplicação da oficina, que foi iniciada com o professor explicitando os objetivos da aula, seguida pela entrega dos palitos de madeira – cada um de tamanhos diferentes – aos alunos e a orientação para montar uma figura geométrica.

Mas, nesse momento do experimento, os educandos dispunham apenas 4 palitos e tamanhos diferentes, então não era possível montar outra figura regular além do triângulo. Após alguns alunos perceberem que só dava de montar um triângulo, foi pedido que eles medissem cada palito e depois tentassem montar vários triângulos, anotando as medidas dos lados que formavam triângulos e as medidas dos que não formam.

O professor coletou as informações que os alunos encontraram, sobre os que formam e os que não formam triângulos, e questionou aos alunos: "perceberam que tem palitos com certa medida que formam triângulo e outros que não formam? Por que isso acontece?" No primeiro momento os alunos não entenderam o que o professor questionou, mas depois de explicar novamente, alguns dos alunos conseguiram chegar a uma conclusão a esse respeito e responderam: "porque a soma das medidas dos dois lados menores têm que ser maior que a medida do lado maior". Após os alunos conseguirem chegar nessa resposta, o professor, a partir da compressão deles, enunciou a definição da condição de existência do triângulo.

Com essa experiência da oficina foi possível perceber que, ao se apoiar em material concreto, o professor se depara com certas dificuldades a serem superadas. A principal dificuldade a ser superada é a do professor conseguir trabalhar com uma metodologia de ensino diferente da qual ele e seus alunos estão acostumados, de forma com que os alunos compreendam a proposta. O professor tem que desenvolver habilidade para atrair o interesse dos alunos para a aula, de modo que eles participem e percebam a relação da oficina com o conteúdo.

1.2 O vídeo e a relação matemática e música no ensino de frações

Com o surgimento das TIC's (Tecnologia de informação e comunicação) e a ampliação de seu poder divulgador que dá acesso a todo tipo de conteúdo, o papel do professor passou a ser não mais de provedor, mas o de mediador entre a informação útil (conhecimento) e os educandos. Nesse sentido, Martins (1997) considera que, no processo interativo, o importante não é especificamente a figura do professor ou a do aluno, mas na interação entre eles e o meio, pois é nesse espaço que acontecem as transformações por ações conjuntas e compartilhadas.

Entre os diversos espaços formativos, encontram-se os ciberespaços disponíveis na internet; eles fazem com que todo tipo de conteúdo esteja a um clique de distância e pode ser utilizado pelo professor de diversas maneiras, seja para motivar seus alunos na exploração inicial de um conteúdo, seja para atividades de consolidação de aprendizagem. Foi a partir desse entendimento que nos propusemos a elaborar um roteiro de vídeo que visa ensinar frações abordando suas relações com a música.

Pereira(2013) revela que o papa São Gregório Magno I (600 D.C) detectou a importância de se instituir uma escrita para registrar os cantos da igreja, os famosos cantos gregorianos. Para efetuar esse tipo de registro, fez-se necessária a elaboração de uma descrição matemática capaz de organizar o tempo de duração dos sons, isto é, impôs-se a necessidade de criação de uma escrita que pudesse indicar quanto tempo o instrumentista precisaria para executar tal nota do instrumento musical, razão pela qual as frações regem o ritmo da música. Destacam-se nessa linguagem três elementos para que um conjunto de sons sucessivos sejam denominados de música: melodia, ritmo, e harmonia, sendo os dois primeiros imprescindíveis, como descreve Cabral(2019).

Foi então que se instituiu, nos mosteiros medievais, um currículo para a formação da intelectualidade da época. De fato, D'Ambrosio (2016) nos revela que a base dos estudos nos mosteiros era o *quadrivium*: Aritmética, Música, Geometria, Astronomia. Segundo o autor, esse programa de estudos foi em parte estabelecido a partir da tradição grega e romana, que preconizava a formação do intelectual e focalizava a palavra, oral e escrita, e as coisas. A palavra "coisa" tinha sentido de tudo o que existe ou possa existir, de natureza corpórea ou incorpórea. O uso da palavra era essencial à Gramática [para ler e escrever], à Retórica [para discursar] e à Dialética [para argumentar].

Já as coisas se expressavam nas quantidades de duas naturezas: discretas e contínuas. As quantidades discretas, os números, se manifestavam-se como absolutas na Aritmética e como relativas na Música. Nesse contexto, o estudo das frações ocupava papel de destaque, visto que o antigo sábio grego Pitágoras já havia estabelecido a relação entre intervalos musicais e as razões das cordas dos instrumentos.

Para as escolas atuais, D'Ambrosio (2016) propõe a adoção do currículo trivium, constituído por "literacia, materacia e tecnocracia". Para D'Ambrosio (2016), a *materacia* é a capacidade de interpretar e analisar sinais e códigos, de propor e utilizar modelos e simulações na vida cotidiana, enquanto a *tecnoracia* é a capacidade de usar e combinar instrumentos, simples ou complexos, inclusive o próprio corpo, avaliando suas possibilidades e suas limitações e a sua adequação a necessidades e situações diversas. Ele explica ainda que *literacia* se refere à capacidade de processar informação escrita e falada, com o uso de signos e gestos, de códigos e números escrita, de mídia e internet (e de outros possíveis instrumentos comunicativos). Desse modo, a *literacia* é entendida como a capacidade de ler e escrever em sentido mais amplo, não se restringindo a apenas traduzir caracteres sequenciados, mas referindo-se à capacidade de analisar, processar e interpretar informação que nos pode chegar através das mais variadas formas de comunicação, como a musical, a gestual ou a sensorial, pelos mais diversos instrumentos, inclusive os que compõem as Tic's.

Para a efetivação da proposta de D'Ambrosio (2016), a matemática escolar deverá ser apresentada de modo a contribuir para o aluno entenda a realidade. Então, o professor deverá assumir o papel de intermediar o conhecimento e preparar sua aula de forma a instigar, no estudante, a busca pelo conhecimento crítico em seu contexto sociocultural. Para tanto, o professor deverá ser capaz de desenvolver novas culturas de produção de conhecimento, considerando, para isso, a influência das novas tecnologias de comunicação. Para contribuir nesse sentido, produzimos um vídeo que visa ensinar frações por meio da música.

Antes de trabalhar com o vídeo propriamente dito, foi necessária a elaboração de um roteiro, visto que o planejamento proporciona a execução de qualquer tarefa com maior qualidade. Para tal, consideramos o público que gostaríamos que este vídeo atingisse através das redes sociais, outro cuidado que tivemos foi explicar em linguagem simples os elementos presentes numa partitura, pois a notação musical de obras eruditas para piano é carregada de informações.

Para o desenvolvimento proposta do vídeo era necessário mostrar inicialmente como as frações mais simples regem o ritmo de uma partitura (as frações mais usadas para peças de piano erudito são 2/4, 3/4 e 4/4), então foi pertinente mencionar os conjuntos numéricos, naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), e por fim os números racionais ($\mathbb{Q}$). Nosso argumento partiu da conveniência de se contar objetos, seguindo para o uso nas operações monetárias que envolvem os elementos opostos do números naturais, até tratarmos da representação numérica de algum objeto que ``não é inteiro´´, mas pode ser subdividido em partes inteiras. Este último possibilita a divisão proporcional das figuras de valores na música.

Ao habituar o espectador do vídeo com estes quesitos, trabalhamos com a parte da notação musical para evitar o excesso de informações genéricas, como por exemplo explicar os tipos de compassos mais usados 2/4, 3/4, e 4/4, quais são todas as figuras de som e suas respectivas pausas, apresentar os símbolos da clave de sol e fá. Contextualizando essas explicações, optamos por executar uma peça simples e curta, o minueto n°2 , do compositor barroco Johann Sebastian Bach. Para trabalhar a terminologia de cada item presente na partitura, mostramos a partitura propriamente dita, servindo como um recurso visual, ao apontar os símbolos.

Todos os itens foram explicados de forma a satisfazer alguma pergunta que o espectador pudesse formular naquele momento, por exemplo, a pauta é uma forma de organização para se identificar qual nota musical é pedida para executar, (a saber são 7 dó - ré - mi - fá - sol - lá - si). Entretanto, é deixado claro que o objetivo não é identificar as notas musicais, mas sim estabelecer uma relação entre a matemática e as figuras de som, em outras palavras, o ritmo da música. Foram apresentadas as figuras de som e suas respectivas divisões:

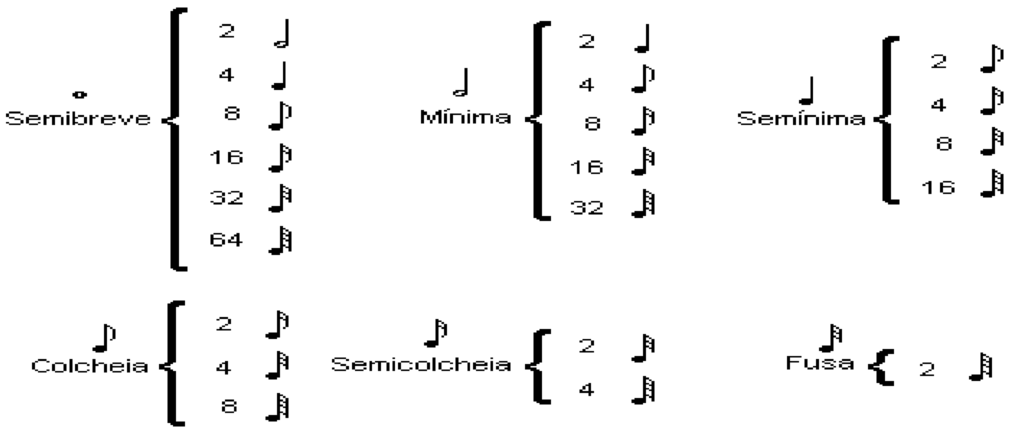

Figura 1 Figuras de som. Fonte Google.

Nesta parte do vídeo foi solicitada a atenção do espectador para as figuras de som: fusa, mínimas, colcheias, semicolcheias, semínimas. Porém, deve-se lembrar que a fração que rege o ritmo é ¾, na qual, como é 4 no denominador a figura que representa um tempo é a semínima, e numerador é 3, que indica o tempo do compasso, no caso trata -se de um ternário. Fica à critério da criatividade do compositor preencher três tempos em cada compasso, com as figuras de som apresentadas, não podendo a soma das subdivisões ultrapassar três.

Após gravarmos o vídeo em três partes separadas, foi necessário editá-lo. Para juntar as partes e agregar vinhetas e animações, utilizamos um programa de edição simples, porém em seu modo completo, com licença paga. Wondershare Filmora se destaca pela interface mais compacta e pelo conjunto de recursos que permite que vídeos sejam trabalhados de forma ágil para fácil compartilhamento via Internet. Esses recursos envolvem efeitos simples de aplicar, mas com resultados bem agradáveis. Há ainda ferramentas para melhorar a qualidade de vídeos gravados em smartphones e câmeras mais simples. O Filmora ainda possui configurações prontas para exportar vídeos no formato ideal para redes sociais, sites, YouTube e etc. O vídeo que produzimos foi disponibilizado no canal do You Tube, no link: https://www.youtube.com/watch?v=LT0d68jgOE4&t=7s

Expusemos o resultado desse trabalho para nossos colegas e ouvimos suas considerações acerca dele, o que nos permitiu refletir conjuntamente sobre o papel do professor, descobrir a importância de lidar de maneira criativa com as situações em sala de aula, e compreender a construção coletiva do conhecimento que acontece em professor--aluno e aluno-aluno. Ao refletir sobre nosso papel diante da produção dessa vídeo aula, foi possível perceber pontos fortes e fracos, os recursos áudio visuais ainda deixam a desejar, a organização do conteúdo e a quantidade será ajustada com o tempo e com mais práticas. As noções de edição também ainda precisam ser trabalhadas a fim de dominar o recurso. Foi gratificante ver nos olhos do espectador curiosidade pelo assunto, pela proposta, o que motivo perguntas e dúvidas, e isso nos motiva a continuar aprendendo novos recursos que nos possibilitem expressar nossa criatividade e o gosto pela matemática.

Sim, é uma tarefa trabalhosa, pensar no roteiro, gravar fazer e refazer, mas é uma das formas de ilustrar as aplicações da matemática. Junto com a construção do vídeo surgiram muitas questões, como poderia me expressar melhor nesse assunto? Qual seria a forma de instigar a curiosidade do espectador? Como faço pra que ele assista meu vídeo até o final? Essas dúvidas são as mesma da sala de aula, são a mesmas de um professor preocupado com a aprendizagem e não serão respondidas com a criação de um único vídeo. As tecnologias quando bem utilizadas são aliadas, geram curiosidade, possibilitam agilidade e praticidade, além de oferecer uma interação quase constante.

Concluímos que este é um trabalho de aprimoramento constante, com inúmeras tentativas, erros e acertos, nas quais o principal objetivo é a aprendizagem do aluno nos diversos espaços, para isso lançamos mão de diferentes associações e problemas cotidianos a serem resolvidos, desafiando, e orientando as direções a serem seguidas.

2. Propostas para o Ensino Médio

A Base Comum Curricular preconiza que:

> [...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BNCC, 2017, p. 527)

Nesse sentido, recorrer ao tema Criptografia por meio da modelagem pode ser uma interessante contribuição.

2.1 Criptografia como estratégia para o ensino de matemática

Uma das faces da sociedade automatizada tem sido o sequestro de dados, que precisam de contínua proteção contra investidas maliciosas de hackers. Nesse contexto, a criptografia, que ao longo da história tem sido útil para proteger segredos ─ principalmente econômicos, políticos e militares ─ tornou-se imprescindível, pois garante a privacidade na transmissão das informações. Aplicativos como WhatsApp, Facebook e Instagram utilizam de métodos criptográficos para garantir a segurança tanto no envio, quanto no recebimento de mensagens. Groenwald e Olgin (2010) ainda descrevem que criptografia é utilizada "em auditoria eletrônica, na autenticação de ordens eletrônicas de pagamento, nos navegadores de internet, entre outras situações da vida cotidiana o que demonstra ser esse recurso de vasta aplicabilidade."

O conjunto de técnica que chamamos de criptografia possui fundamentação matemática, o que torna possível o seu uso em sala de aula a partir da aplicação da metodologia de modelagem matemática. D'Ambrosio (1989, p. 17) afirma que:

> A modelagem matemática tem sido utilizada como uma forma de quebrar a forte dicotomia existente entre a matemática escolar formal e a sua utilidade na vida real. Os modelos matemáticos são formas de estudar e formalizar fenômenos do dia a dia. Através da modelagem matemática o aluno se toma mais consciente da utilidade da matemática para resolver e analisar problemas do dia-a-dia.

Por essas suas características – fundamentação matemática e por estar atrelada às novas tecnologia —, consideramos que a criptografia pode ser utilizada como ferramenta de ensino de vários conteúdos matemáticos. Então, ilustrando a relação entre a Matemática e o cotidiano extraescolar e a sua importância para a configuração da sociedade altamente tecnológica, a criptografia tem sido apontada como capaz de estimular o estudo da disciplina.

Dentre os conceitos relacionados com a criptografia e afeitos aos conteúdos matemáticos do Ensino Médio, estão funções, matrizes e teoria dos números, conforme sugere Jansen (2016). Para analisarmos a eficácia da proposta, foi desenvolvido uma intervenção pedagógica na Escola Estadual Marechal Eurico Gaspar Dutra, em Barra do Garças/MT. A atividade foi programada da seguinte forma: inicialmente pensamos em duas aulas para aplicação da atividade. No primeiro dia, falamos a respeito da criptografia para que os alunos pudessem se inteirar do tema. Mas antes de entrarmos especificamente no assunto, para que houvesse uma interação dos alunos, mostramos no slide a imagem de uma mensagem codificada.

Logo após, perguntamos aos alunos se essa forma de escrita lhes era familiar e se eles sabiam interpretar o que estava escrito na imagem. Depois de apresentarmos a imagem para a turma e de discutirmos sobre a mesma, apresentamos formalmente o conceito de criptografia aos alunos. Explicamos também alguns conceitos importantes relacionados à criptografia - como cifrar, decifrar, codificar, decodificar, chave, algoritmo, criptografia de chave pública, criptoanálise - para que os alunos pudessem compreender melhor o assunto. Discorremos brevemente sobre como a criptografia esteve presente ao longo da história até chegarmos à sua aplicação nos dias atuais.

No segundo dia, revisamos os conceitos de função afim e função inversa e resolvemos alguns exercícios relacionados a esses conteúdos, pois os alunos precisavam entender bem esses conceitos para que a atividade proposta fosse realizada. A função afim seria utilizada para cifrar uma frase que já fora escolhida a priori, já a função inversa faria o contrário: decifraria a mensagem. A professora nos cedeu uma aula a mais, pois não conseguimos desenvolver a atividade em apenas duas aulas.

Então, no terceiro dia, aplicamos a atividade. Logo após revisarmos esses conceitos, separamos a sala em grupos de cinco pessoas, e entregamos a cada grupo a atividade. Em uma folha A4, havia uma tabela com o alfabeto, e cada letra desse alfabeto estava relacionada a um número já pré-determinado. A frase escolhida para ser cifrada foi: "*OS NÚMEROS GOVERNAM O MUNDO*" e a função cifradora escolhida foi: $f(x) = 5x\text{-}4$. Então, os grupos deveriam cifrar e decifrar a mensagem de acordo com a função dada. Para cifrar a mensagem, os alunos deveriam substituir na função $f(x) = 5x\text{-}4$ os números que tivessem relacionados com a letra desejada na tabela, segundo a imagem abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	#
2	1	3	5	4	7	8	9	11	26	12	13	30	10	14	17	21	25	6	19	20	24	16	15	18	28	31

Figura 2: Tabela de codificação para a função afim. Fonte: Arquivos dos autores

Na atividade proposta, se o resultado fosse um número maior que 26, os alunos deveriam trocar este número pelo resto da divisão por 26 que corresponderia a uma letra da tabela. Durante a execução da atividade, quase todos alunos apresentaram dificuldades em realizar operações aritméticas básicas, como a divisão por exemplo, mostrando-se muito dependentes do uso da calculadora. Percebemos que os alunos não conseguiam compreender o raciocínio por trás dos cálculos de divisão e isso foi algo bastante inesperado, por se tratar de alunos do segundo ano do ensino médio.

Face às dificuldades percebidas, precisamos orientar os alunos a resolverem o método da chave, pois resolver na calculadora não bastava porque o resto da divisão seria usado nas contas. Isso nos leva a refletir a respeito do uso de calculadoras nas aulas de matemática, que é de suma importância, porém, os alunos devem ter a compreensão dos cálculos que estejam efetuando. Infelizmente, não deu tempo de os alunos fazerem a atividade na qual utilizariam a inversa da função para decodificar a mensagem, pois, como dito anteriormente, não esperávamos nos deparar com tantas dificuldades na execução da atividade. Entretanto, essa experiência nos permitiu perceber que a contextualização de conteúdos matemáticos por meio da exploração de temas que não são habituais aos alunos, apesar de afetarem continuamente seu cotidiano, podem despertar o interesse dos estudantes e, assim, contribuir para com o seu aprendizado e que após algumas adequações, a proposta poderia ser efetivada de modo a requerer menos tempo. Assim, remodelamos nossos planejamentos e elaboramos uma oficina de criptografia, que posteriormente viria a ser aplicada com sucesso numa escola particular de Barra do Garças/MT.

2.2 Visualizando as "várias" faces da Faixa de Möbius

D'Ambrósio (1989) propõe ao professor: instigar o aluno a construir conceitos matemáticos por meio de situações que estimulem a sua curiosidade; estimular o aluno com problemas de naturezas diferentes; interpretar o fenômeno matemático e incentivar o aluno a explicá-lo a partir de sua concepção da Matemática; envolver o aluno no "fazer" matemático, no sentido de criar hipóteses e investigá-las a partir da situação problema proposta. Também, uma das alternativas encontradas para minorar o desinteresse de estudantes com relação aos conteúdos matemáticos tem sido intercalar, com os conteúdos previstos no "currículo oficial", novos conteúdos matemáticos que atraiam a atenção e despertem curiosidade nos alunos e os incentivem à pesquisa e estudo por conta própria.

O trabalho ao qual agora nos reportamos apresenta-se como uma tentativa de contribuir nesse sentido, na medida em que expõe a Faixa de Moebius, a Teoria dos Nós e a Topologia como possibilidades de atualizar o ensino de matemática e instigar a curiosidade dos estudantes e, ainda, leva-los a realizar experimentações matemáticas. Os três temas referem-se a conhecimentos matemáticos recentes[4] e "quebram" a ideia de muitos estudantes de que a disciplina de matemática é fechada e pronta.

---

[4] Nesse sentido, observa-se que grande parte dos conteúdos matemáticos abordados na Educação Básica remete à Antiguidade Clássica.

A elaboração da *Teoria dos nós* foi inspirada pelos nós [amarrações] que aparecem na vida quotidiana em cadarços e cordas; mas refere-se a Nós matemáticos. Os Nós comuns não são Nós matemáticos, por que eles possuem pontas “soltas” que permitem desatar o Nó é fazer um outro Nó diferente. Nessa condição, não há nada que se possa afirmar acerca desses Nós em particular, pois eles não são topologicamente fechados, logo pode-se sempre desfazer o Nó e fazer outro diferente.

Podemos definir um Nó matematicamente como uma curva fechada no espaço (terceira dimensão) a qual não possua autointerseção. Em outras palavras, os nós podem ser considerados como um pedaço de corda com um entrelaçamento de qualquer forma, desde que suas extremidades permaneçam unidas, ou seja, sem “pontas” soltas. Existem diferentes formas de representar os Nós, e um deles, e talvez o mais simples, é o diagrama plano chamado Diagrama de Nós.

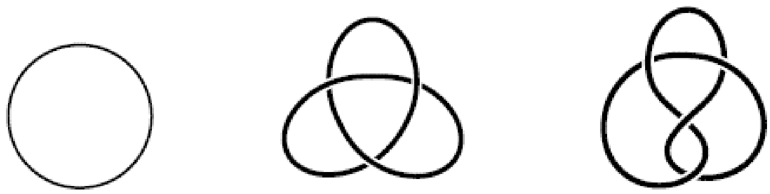

Figura 3. Diagrama de Nós: trivial, trevo e figura oito Fonte: (NOGUEIRA, 2015)

Outro modelo bem conhecido é na forma de representações tridimensionais.

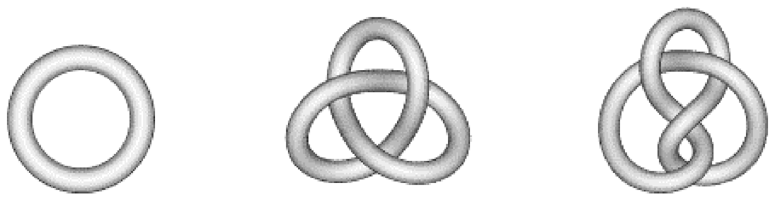

Figura 4. Representação em 3D: trivial, trevo e figura oito. Fonte: (NOGUEIRA, 2015).

O nosso interesse são os Nós matemáticos e a Faixa de Moebius, que é um corpo que pode ser representado na terceira dimensão, mas que na verdade é bidimensional, além de ser uma superfície que possui apenas um lado. De alguma forma, esses dois temas parecem estar ligados um ao outro através da Topologia, um ramo da matemática que estuda as transformações geométricas nos objetos.

A área de estudo relacionada à topologia é relativamente nova, visto que, de acordo com Papas (1995), “a Topologia surgiu, no século XVIII, a partir das tentativas de solução do problema das pontes de Königsberg, problema este que veio a ser resolvido por Euler, quando usou uma parte da Topologia que é conhecida hoje por teoria dos grafos” (apud SILVA, 2012, p. 2). O problema em questão tinha como propósito criar um único caminho que percorresse por todas as 7 (sete) pontes da cidade de Königsberg, sem passar duas vezes pela mesma ponte. Após propor uma representação que transformava as pontes em linhas e os lugares onde se intersectavam em pontos, Euler percebeu que, para resolver determinados problemas matemáticos, não precisava necessariamente de sua forma geométrica, o que possibilitava fazer certas transformações, desde que mantivessem algumas propriedades. Essa forma de pensar resultou na elaboração das primeiras noções topológicas.

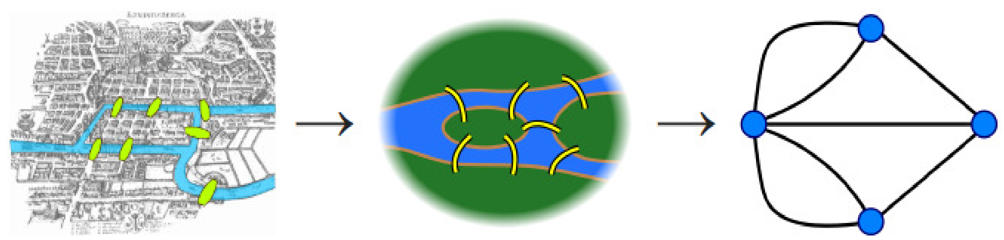

Figura 5. Representação esquemática das sete pontes de Königsberg e a transformação topológica feita por Euler.
Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

A Topologia é o estudo matemático das funções contínuas, dos espaços e suas formas. Mais precisamente, podemos definir a Topologia como o estudo das propriedades do espaço não afetadas por deformações contínuas, de modo que essas deformações não danifiquem a estrutura como rasgá-las, nem as arrebentar, tampouco operar algum furo na superfície (DIENES; GOLDING, 1977, p. 2). Em complemento, Schemmer e Pereira determinam a Topologia como

> uma geometria cuja relação de equivalência entre os objetos é dada através de transformações contínuas que podem ser continuamente desfeitas [...]. Em virtude disto, na topologia não se firmam conceitos de comprimentos, áreas, ângulos e tantos outros, pois os objetos podem ser representados por materiais totalmente deformáveis. [...] Podemos esticar as figuras ou encolhê-las sob certas condições, e continuar obtendo figuras equivalentes. (PEREIRA; SCHEMMER, 2006, p.2)

Simplificando, a topologia estuda os objetos sem se preocupar com sua forma geométrica. Temos por exemplo duas figuras geométricas distintas, um quadrado e uma circunferência. Topologicamente falando, esses dois corpos são equivalentes, pois podemos “transformar” uma figura em outra sem romper a linha mantendo as propriedades dos pontos. Podemos imaginar também duas folhas de papéis em que uma esteja completamente amassada enquanto a outra não. A nível topológico, esses dois objetos são equivalentes um ao outro, mas se um dos dois estiver com um furo ou corte, eles perdem a propriedade de equivalência, pois sua estrutura foi danificada ou descontinuada.

Para podermos remodelar um objeto geométrico na topologia, existem algumas operações que são permitidas, tais como: esticar, inflar, encolher, amaçar e torcer. Não é permitido rasgar, cortar ou furar. Desse modo, a topologia ficou conhecida de várias formas diferentes, dentre alguns nomes temos a Geometria das Deformações e a Geometria Elástica.

Assim, podemos analisar também a equivalência entre objetos geométricos através da quantidade de furos da cada um, pois corpos com quantidades de furos diferentes não são topologicamente equivalentes, já que não é permitido realizar um furo extra ou tampar um buraco já existente. Um exemplo clássico da área é dizer que uma rosquinha do modelo de um donuts é equivalente a uma xícara de café, pois ambos possuem apenas um buraco, logo é possível deformar um até que possua a forma do outro.

Figura 6. Transformação de uma rosquinha em uma xícara. Fonte: site matemateca.ime.usp

Devido às suas propriedades, o campo de estudo da Topologia está diretamente ligado à Teoria dos Nós e à Faixa de Möbius. Um dos primeiros registros que se tem ao estudo dos Nós em 1833, quando Gauss definiu o número de enlaces (duas curvas fechadas, ou dois nós entrelaçados), mas o conteúdo só ganhou maior notoriedade em 1860, com o físico William Thomson (Lord Kelvin). De acordo com sua teoria, os átomos eram modelados por Nós, ou seja, diferentes Nós representavam diferentes átomos. Desse modo, acreditava-se que os Nós eram a chave para o entendimento das substâncias químicas. Infelizmente, provou-se que essa proposição era equivocada, fazendo com que os químicos se desinteressassem pela área, o que não foi o caso dos matemáticos, que seguiram os estudos mesmo sem saber uma área de aplicação, movidos apenas pela curiosidade e pelo fascínio da área.

Impulsionado ainda pela Teoria de Lord Kelvin, Peter Guthrie Tait criou uma das primeiras tabelas de classificação de Nós, de acordo com o número de cruzamentos. Os novos estudos que surgiram posteriormente contribuíram bastante para o campo da topologia, e mais tarde resultou na criação da Teoria dos Nós. Na sequência, grandes descobertas surgiram tanto na própria área como também em outros campos, principalmente na Biologia, Química e Física. Como exemplos de contribuição da teoria matemática a essas outras áreas científicas, temos a representação de uma célula de DNA através de um Nó, a aplicação na Teoria das Supercordas, e o estudo das estruturas tridimensionais das moléculas.

Com o avanço da área, pode-se perceber que ao descobrirem modelos de Nós mais complexos, eram necessárias novas formas para poderem classificá-los, pois nenhum método já conhecido era suficientemente completo para poderem catalogá-los, e isso resultou na detecção de um dos principais problemas da teoria que ainda não possui solução.

Um dos principais pontos de estudo da Teoria dos Nós são as possíveis deformações que podem ser feitas para "desembaraçar" o Nó sem cortá-lo, de modo que se possa transformar um Nó em outro. Se isso acontecer, significa que esses dois Nós são exatamente os mesmos. Com o passar do tempo, foi necessário criar várias formas para classificar os Nós, pois como afirmado anteriormente, muitos dos novos Nós classificados não eram suportados nas classes existentes. Mesmo atualmente, ainda não existe um método completo de classificar todos os Nós. A classificação dos nós é feita de acordo com suas classes, ou características, que podem ser distinguidas através de alguns modelos de invariantes.

O terceiro tema que compõe a nossa proposta de abordagem da matemática para o Ensino Médio, a Faixa de Moebius (Möbius), também conhecida como Fita de Moebius, é um objeto muito curioso no campo de estudo da topologia, que fascina os matemáticos até os tempos atuais. Ela foi estudada pelo matemático alemão August Ferdinand Möbius em 1858, mas há quem diga que a ideia central tenha partido de Gauss, já que Möbius havia estudado com ele antes[5]. O grande destaque desse objeto se dá ao fato de ser um objeto bidimensional com apenas um lado.

---

[5] Outro matemático alemão também aluno de Gauss, Johann Benedict Listing teria estudado o objeto, de forma independente, alguns meses antes. O estudos sobre este objeto topológico teriam sido retomados por Möbius tendo em vista a obtenção de um prêmio sobre a teoria geométrica dos poliedros, oferecido pela Academia de Paris.

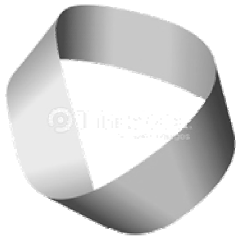

Figura 7. Faixa de Moebius. Fonte: http://www.thinkstockphotos.com.pt

Dentre algumas de suas propriedades, temos:

- Possui apenas um lado;
- Possui apenas uma borda ou fronteira;
- Não é orientável;

Atualmente, a Faixa de Moebius pode ser vista em várias formas na cultura pop, como em músicas, pinturas, e até mesmo em logotipos, como o símbolo da Psicopedagogia, do IMPA e da reciclagem. Nas artes, um dos usos mais interessantes para a faixa de Moebius foi proposto pelo holandês Mauritus Cornelis Escher (1898- 1972), artista gráfico reconhecido por sua habilidade em captar conceitos matemáticos e plasmá-los em suas obras. Escher fez duas gravuras que se tornaram famosas: a "Faixa de Moebius I" e a "Tira de Moebius II".

Mas a Faixa de Moebius também está presente na mecânica por trás do funcionamento de escadas e esteiras rolantes, e de máquinas que utilizam ou que são compostas de sistema de polias e correias, pois sua característica de possuir apenas um lado, possibilitou a otimização e manutenção desse tipo de mecanismo, já que é possível percorrer toda a superfície da faixa duas vezes a mais, do que ocorreria se utilizassem um método parecido com o do cilindro, por exemplo. É possível encontrar afirmações de que a Faixa de Moebius também seja a representação do símbolo do infinito, embora nada ainda pode ser confirmado, mas parece ser pouco provável, já que esse símbolo possui uma intersecção, diferentemente da faixa.

Existe uma curiosa relação entre a Faixa de Moebius e a Garrafa de Klein. Como já afirmamos, a Garrafa de Klein é um objeto pertencente à quarta dimensão, mas ela possui algumas características a mais, e dentre algumas, temos que ela é uma superfície fechada que não possui bordas, e assim como a faixa, ela não é orientável, ou seja, os conceitos de direita e esquerda não são aplicados nessa superfície, nem mesmo os conceitos de interior e exterior que também é aplicável em seu caso. A parte interessante é que se dividirmos a Garrafa de Klein ao meio, obteremos duas Faixas de Moebius, de modo que uma seja o simétrico espelhado da outra, essa e outras constatações podem ser feitas pelos estudantes a partir de experimentações em sala de aula. Esse momento pode ser também um convite para explorar mais intensamente as relações entre matemática e arte, no qual o estudante faça suas próprias propostas estéticas.

Considerações Finais

Pensamos que a formação de professores deve engendrar espaços nos quais se possa analisar as aplicações das diferentes metodologias de ensino da área, bem como discutir o uso dos recursos didáticos disponíveis. Consideramos ainda que tais análises e discussões devem ocorrer numa perspectiva que privilegie a integração entre teoria e prática, bem como entre a universidade e as escolas de educação básica. Principalmente, observamos a importância de se compartilhar tais experiências e reflexões, para que elas possam instigar outros professores a estratégias que os afastem de um ensino mais rotineiro.

Em vista disto, ao longo desse artigo, discorremos sobre algumas das atividades desenvolvidas no sentido de favorecer o aprendizado da matemática, gerando curiosidade e promovendo a elaboração de caminhos diferenciados para a resolução de problemas. Em cada uma das nossas propostas, buscamos tornar o aluno questionador e produtor de conhecimento; mas para constituir tais propostas nós próprios também procuramos seguir o caminho da pesquisa. Realizadas as pesquisas e elaboradas as propostas, nós as testamos por meio de atividades de extensão universitária. Essa integração entre ensino, pesquisa e extensão revelou-se como um poderosa ferramenta para a construção de conhecimentos docentes.

As experiências que aqui partilhamos foram capazes de nos mostrar que é preciso ir além do chamado "método tradicional", assim como da lousa e do livro didático. Sobretudo, foi-nos possível concluir que o professor de matemática precisa desenvolver atitudes críticas com relação à sua própria prática. Finalmente, esperamos que este trabalho possa instigar outros professores a refletir e a organizar suas próprias estratégias para contribuir de fato com o aprendizado da matemática.

Agradecimentos

Aos professores da Educação Básica que têm sido parceiros nessas experiências; em especial, àqueles que tem colaborado como supervisores dos licenciandos estagiários.

Referências

ANASTASIOU, L. das G. C.; ALVES, L. P.(orgs.). **Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em sala de aula**. 6. Ed. – Joinville, SC: UNIVILLE, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base nacional comum curricular**. Brasília, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 02/08/2019

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19. Disponível em https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1953133/mod_resource/content/1/%5B1989%5D%20DAMBROSIO%2C%20B%20-%20Como%20Ensinar%20Matem%C3%A1tica%20Hoje.pdf

D'AMBROSIO, U. **Educação para uma sociedade em transição**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016

MARTINS, João Carlos. **Vygotsky e o papel das interações sociais na sala de aula**: reconhecer e desvendar o mundo. Série Ideias, v. 28, p. 111-122, 1997.

MATTAR, João. **YouTube na educação**: o uso de vídeos em EaD. São Paulo:

NOGUEIRA, Daniel Klug. **Introdução à Teoria dos Grafos**: Proposta para o Ensino Médio. Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 2. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2009.

PEREIRA, Marcos do Carmo. **Matemática e Música, de Pitágoras aos Dias de Hoje**. Rio de Janeiro. 2013.

REZENDE, A. M. **Concepção fenomenológica da educação**. São Paulo: Cortez, 1990.

ZABALA, A. **A prática educativa:** Como ensinar. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Ltda, 1998.