

O PENSAMENTO ALGÉBRICO E O CONCEITO DE VARIÁVEL: UMA PROPOSTA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Paulo Ferreira do Carmo ¹

Resumo: A manipulação de informação em diversos tipos de linguagens se mostra cada vez mais necessária no mundo contemporâneo. A linguagem algébrica se torna significativa para o estudante exercer sua cidadania, seja na organização de seu pensamento, interpretação e compreensão da linguagem simbólica, na resolução de diversos tipos de problemas ou na generalização de padrões em diversas situações. A divulgação de diversos indicadores mostra que a educação algébrica apresenta problemas na educação básica. O objetivo deste artigo é apresentar algumas noções do pensamento algébrico relacionado ao conceito de variável fundamentado no modelo dos três usos da variável (modelo 3UV) como uma proposta alternativa para o ensino de álgebra na escola básica a partir da análise e discussão de atividades extraídas de pesquisas e livros didáticos do ensino fundamental anos finais e ensino médio que têm como objetivo o ensino de álgebra na educação básica.

Palavras-chave: Ensino de álgebra. Pensamento algébrico. Conceito de variável. Modelo 3UV.

ALGEBRAIC THINKING AND THE VARIABLE CONCEPT: AN ALTERNATIVE PROPOSAL FOR TEACHING ALGEBRA IN BASIC EDUCATION

Abstract: The manipulation of information in different types of languages is becoming increasingly necessary in the contemporary world. Algebraic language becomes meaningful for students to exercise their citizenship, whether in organizing their thinking, interpreting and understanding symbolic language, in solving various types of problems or in generalizing patterns in various situations. The dissemination of several indicators shows that algebraic education presents problems in basic education. The aim of this paper is to present some notions of algebraic thinking related to the concept of variable based on the model of the three uses of the variable (3UV model) as an alternative proposal for the teaching of algebra in elementary school from the analysis and discussion of activities extracted from research and textbooks of elementary school final years and high school that aim the teaching of algebra in basic education.

Keywords: Algebra teaching. Algebraic thinking. Variable concept. 3UV model.

1. Introdução

A sociedade contemporânea exige dos indivíduos escolhas e tomada de decisões em diversas situações. A Matemática exerce uma função importante nesses processos sendo mais do que uma simples técnica para efetuar operações e medidas. Para se apropriar do conhecimento é necessário organizar o pensamento, estruturar dados e informações, fazer

¹ Doutorado em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso - Campus Universitário do Araguaia. paulo2012carino@gmail.com

previsões para decidir, avaliar riscos quantitativamente, relacionar ideias e informações e aplicá-las em novas situações, daí a importância da Matemática ao exercício da cidadania.

É por meio de atividades propostas pelo professor de acordo com o currículo desenvolvido nas escolas que ocorre a formalização do pensamento matemático (aritmético, algébrico e geométrico). O ensino da álgebra na educação básica está previsto desde os anos iniciais do ensino fundamental. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê a unidade temática álgebra e explicita:

A unidade temática **Álgebra**, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2018, p. 268, grifo do autor).

E ainda destaca que para o trabalho nos anos finais do ensino fundamental,

[...] os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação (BRASIL, 2018, p. 269).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio (2000) o ensino de álgebra tem como objetivo ampliar a capacidade de o aluno resolver problemas:

O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real (BRASIL, 2000, p. 44).

Diante disso, pode se inferir que as atividades de generalização de padrões oferecem grande potencial para o ensino da Álgebra, tal como sugerem diversas pesquisas no âmbito da Educação Matemática (CARMO, 2014; BARBOSA, 2011; HAMAZAKI, 2010; BRANCO, 2008; BORRALHO *et al.* 2007 ; ALVARENGA & VALE, 2007; PONTE, 2005).

2. O ensino de álgebra e o pensamento algébrico

Para Branco (2008) o início da aprendizagem de álgebra exige abstração e alguma capacidade de reformular o significado e a manipulação dos símbolos usados na aritmética. De acordo com Branco (2008), nem sempre estas condições se verificam e, para os estudantes, a aprendizagem da álgebra é, muitas vezes, mecânica e desprovida de significados. Ponte (2005) afirma:

Quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e suas operações e de entender e usar a linguagem abstrata da álgebra ficará seriamente limitado nas suas opções escolares, profissionais e no seu exercício de cidadania democrática (p. 3).

O desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do estudo da álgebra é de extrema importância para a efetiva aprendizagem dos estudantes, pois amplia sua capacidade de organizar e resolver problemas em diversas áreas do conhecimento. Para Ponte (2005), o pensamento algébrico diz respeito ao estudante:

Compreender padrões, relações e funções (estudo das estruturas); representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (simbolização); usar modelos matemáticos para representar e compreender as relações quantitativas (modelação); e analisar mudanças em diversas situações (estudo da variação) (p. 4).

Para Becher e Groenwald (2009):

O pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações, tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial (p. 3).

Para esses autores, o pensamento algébrico deve ser desenvolvido no ambiente escolar e o professor tem a responsabilidade de planejar, aplicar e avaliar estudos desenvolvidos para melhorar a aprendizagem de seus estudantes.

Atualmente, os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática vêm apresentando diversos problemas, e com a álgebra não são diferentes. Pesquisas americanas da década de 1980 apontavam que os alunos chegavam ao ensino superior com defasagens referentes ao conceito de variável. Em Portugal, pesquisas de 2000 em diante, apontam que os estudantes portugueses de educação básica têm dificuldades em interpretar o significado da letra em uma expressão algébrica. Na Argentina, de acordo com Sessa (2005), o ensino da álgebra se resume em manipulações algébricas sem significados, levando os estudantes a diversos problemas de assimilação desse conteúdo. No Brasil, não é diferente, diversos

indicadores apontam as dificuldades que os estudantes enfrentam na aprendizagem de Matemática.

Os problemas de aprendizagem são agravados pelo fato de que o ensino da álgebra não possui significado para os estudantes, fazendo com que a vejam como conteúdo matemático de manipulações de letras sem sentido. Tradicionalmente, o estudo sistemático da álgebra elementar no currículo escolar brasileiro é feito a partir do 7º ano do ensino fundamental (FIORENTINI *et al.* 2005), com a proposta de desenvolver a linguagem e o pensamento algébrico a partir do estudo de equações polinomiais de 1º grau com ênfase nas regras de manipulação para o cálculo da incógnita, sem nenhum significado, estuda-se álgebra como uma aritmética generalizada, sem atribuir significado para suas ideias fundamentais.

Na pesquisa de Alvarenga & Vale (2007), cuja finalidade foi analisar o trabalho de alunos em tarefas que envolviam a exploração de padrões e suas implicações no desenvolvimento e consolidação de conceitos matemáticos no 5º ano do ensino básico, as autoras constataram que a atividade de resolução de problemas com procura de padrões e regularidades foi “um modo de envolver o aluno e desenvolver alguns componentes do pensamento algébrico, tais como: particularizar, conjecturar, generalizar e simbolizar as relações observadas” (p. 2). As autoras acompanharam dois estudantes do 5º ano de uma escola de ensino básico durante um ano letivo e concluíram que os dois estudantes conseguiram desenvolver diferentes capacidades relacionadas com a resolução de tarefas envolvendo exploração de padrões; detectar e descrever, prolongar em termos próximos, calcular valores específicos e dar continuidade na resolução da atividade proposta.

A pesquisa de Branco (2008), cuja finalidade foi compreender de que modo uma atividade de ensino para o 7º ano de escolaridade baseada no estudo de padrões e regularidades contribuía para o desenvolvimento e mobilização do pensamento algébrico e para a compreensão, em particular, das variáveis e equações. Com base na análise das produções dos estudantes, a autora ressaltou que os estudantes desenvolveram a capacidade de generalizar e compreender a letra como número generalizado e como incógnita. No entanto, na resolução de problemas, os estudantes deram preferência a métodos aritméticos e apresentaram dificuldades em usar a linguagem algébrica para representá-los. Revelaram um desenvolvimento da compreensão da linguagem algébrica, como o significado dos símbolos e o significado das manipulações de expressões. Mas, Branco (2008) afirmou que essa compreensão foi muito frágil e que esse é o primeiro passo de um longo caminho para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Ponte (2005), em seu estudo situou os diversos problemas do ensino da álgebra em Portugal e afirmou que, séculos atrás, os objetos fundamentais da álgebra eram as equações e as expressões que os livros didáticos utilizavam para iniciação do estudo. Hoje em dia, de acordo com o autor, essa visão não vem se apresentando como um caminho eficiente, uma vez que, neste tema, estuda-se todo tipo de estruturas definidas por operações ou relações entre conjuntos. Como estratégia para o ensino, ele propõem uma terceira via, que consiste em atrasar a introdução do simbolismo introduzindo-os somente em momentos oportunos de modo que seja explorado em contextos significativos no quadro de atividades que mostrem, de forma natural, aos estudantes o poder matemático da simbolização e da formalização.

Ponte (2005, p. 14) ressalta que “nos programas de ensino básico e médio em Portugal, a álgebra desaparece, como grande tema da Matemática, ficando reduzida a um conjunto de ‘técnicas’ de cálculos algébricos e ao estudo das funções”, o que, para mim, remete ao fato de a álgebra ser explorada apenas como uma generalização de conceitos aritméticos, deixando para segundo plano suas ideias fundamentais como, por exemplo, o estudo de parâmetros. O autor afirma que não se dá atenção ao estudo de padrões e regularidades, nem ao uso do simbolismo em situações reais e contextualizadas, como comprovam os resultados da avaliação internacional PISA (*Programme for International Student Assessment*) analisados por ele nesse artigo. Assim, ele afirma que há necessidade de se repensar o currículo de álgebra em Portugal.

3. O conceito de variável

Usiskin (1995), afirma que a álgebra da escola média tem a ver com a compreensão do significado das letras (variáveis) e das operações com elas. Para a autora, o conceito de variável é multifacetado, e para exemplificar essa afirmação, ela apresenta as seguintes equações, todas da mesma forma, como exemplo:

1. $a = b \cdot h$
2. $40 = 50x$
3. $\text{sen}(x) = \cos(x) \cdot \text{tg}(x)$
4. $1 = n \cdot \frac{1}{n}, \text{ com } n \neq 0$
5. $y = kx$

Cada uma delas tem um caráter diferente. Comumente chamamos (1) de fórmula, (2) de equação ou sentença aberta, (3) de identidade, (4) de propriedade e (5) de equação de uma função que traduz uma proporcionalidade direta (não é para resolver) (p. 10).

Para a autora as concepções de variável mudaram com o tempo, na década de 1950 só se mencionava a palavra variável relacionada a discussão de sistemas lineares, sendo

descrita como “um número mutável”. Ainda na década de 1950, as variáveis estavam associadas as fórmulas e assim afirmavam “em cada fórmula, as letras representam números; o uso de letras para representar números é a principal característica da álgebra” (HART, 1951a *apud* USISKIN, 1995, p. 10) e ainda apareceu uma afirmação mais formal para variável: “uma variável é um número literal que pode assumir dois ou mais valores durante uma determinada discussão” (HART, 1951a *apud* USISKIN, 1995, p. 10).

A concepção de variável para May e Van Engen (1959, p. 70 *apud* USISKIN, 1995):

Uma variável, a grosso modo, é um símbolo pelo qual se substituem os nomes de alguns objetos, comumente números, em álgebra. Uma variável está sempre associada a um conjunto de objetos cujos nomes podem ser substituídos por ela. Esses objetos chamam-se valores da variável (p. 11).

Para Usiskin (1995) a tendência é evitar a distinção “nome-objeto” e pensar em uma variável como um símbolo pelo qual se podem substituir coisas de um determinado conjunto de objetos.

Segundo a pesquisadora, as finalidades da álgebra são determinadas por concepções algébricas diferentes que, em essência, correspondem aos diferentes usos das variáveis. São elas:

Concepção 1: A álgebra como aritmética generalizada (p. 13).

Concepção 2: A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas (p. 14).

Concepção 3: A álgebra como estudo de relações entre grandezas (p. 15).

Concepção 4: A álgebra como estudo das estruturas (USISKIN, 1995, p. 17).

A autora apresenta o seguinte quadro para simplificar suas afirmações:

Quadro 1: Concepções da álgebra e os usos das variáveis

Concepções da álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo das relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin (1995, p. 20)

Segundo a autora, não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada ou como um meio para resolver certos tipos de problemas, ela fornece meios para desenvolver e analisar relações e é a chave para caracterização e compreensão de estruturas matemáticas.

Já para Fossa (2011), as diferenças entre as linguagens naturais e o formalismo algébrico causam dificuldades de aprendizagem para o estudante no que se refere ao conceito de variável. O autor apresenta o exemplo do problema aluno-professor: “o número de alunos é

seis vezes o número de professor” que muitos alunos representam $6A = P$ (em que A é o número de alunos e P o número de professores), que a resposta correta é $6P = A$ e que os alunos apresentam essa resposta incorreta por associarem a ordem do formalismo algébrico a ordem que aparece na expressão de língua natural.

O autor ainda afirma que a definição de variável como uma quantidade mensurável que varia quando a situação varia e que sua variação é implícita e que tem de ser percebida pelo o estudante quando ele a usa, torna o conceito de variável muito difícil para o principiante. Fossa (2011) também afirma que “a insistência de que a variável é algo que varia não somente confunde a distinção entre a sintaxe e a semântica, mas também ignora o fato de que a variável pode funcionar de maneiras diferentes em contextos algébricos diferentes” (p. 25).

Um entendimento geral da ideia de simbolismo e a capacidade de usar o formalismo da álgebra em diversas situações é mais importante do que apenas uma concepção limitada do conceito de variável, muitas vezes interpretada como incógnita, afirma Fossa (2011). Diante disso, o autor reitera que os estudantes terão muitos benefícios de desenvolverem a capacidade de entender o conceito de variável e seus diversos usos em detrimento de interpretá-lo como incógnita.

Fossa (2011) ainda ressalta, que:

É necessário modificar a maneira de como o conceito de variável é ensinado atualmente, por incluir esclarecimentos explícitos sobre a sintaxe do formalismo algébrico, pois é esse tipo de ensino que poderá levar o aluno a uma compreensão maior do simbolismo e da maneira como ele funciona (p. 33).

4. Os Três Usos da Variável

Para Ursini *et al.* (2005), os professores conhecem as dificuldades de aprendizagem que os estudantes apresentam nos conteúdos de álgebra na educação básica e que nas últimas décadas as investigações acerca do ensino da álgebra têm focado um conceito central: o conceito de variável. Os autores afirmam que, de acordo com essas investigações, as variáveis se apresentam em diversas formas quando se resolvem problemas algébricos e que esse caráter multifacetado está na origem das dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Os autores apresentam um modelo em que ressaltam os aspectos que caracterizam os três usos mais comuns em conteúdos de álgebra na educação básica, o modelo dos três usos da variável (modelo 3UV). Mostram exemplos de como se pode usar o modelo para analisar problemas algébricos que comumente são propostos em sala de aula. Para Ursini *et al.* (2005,

p. 10) o objetivo do modelo 3UV é fornecer um auxílio aos professores ou a “todos aqueles que pretendem ajudar os estudantes a alcançar uma melhor compreensão da álgebra elementar”.

Para esse grupo de pesquisadores “a álgebra escolar se caracteriza pela introdução de símbolos literais, comumente chamados de variáveis, para representar números” (URSINI *et al.*, 2005, p. 11). No ensino fundamental os estudantes são levados a considerarem os símbolos literais como etiquetas que se referem a entidades específicas ou à letra inicial de uma palavra (Exemplo: A para área, b para base, C para comprimento etc.). No ensino médio as letras surgem cada vez com maior frequência e se espera que os estudantes não as considerem com etiquetas iniciais de palavras e que aprendam a interpretá-las como incógnitas ou números indeterminados, dependendo da expressão ou da situação que aparecem. Ursini *et al.* (2005, p. 11) ressaltam que “diversas investigações apresentam que a maioria dos estudantes apresentam dificuldades para desenvolver uma compreensão adequada das letras em álgebra e conquistar uma capacidade aceitável de trabalhar com elas”.

Para os autores a álgebra da educação básica estabelece essencialmente os três usos da variável como: para representar as incógnitas, os números genéricos e as relações funcionais entre distintas quantidades. Para que os estudantes possam desenvolver a capacidade de compreensão dos três usos da variável, os pesquisadores afirmam que é necessário o desenvolvimento de algumas capacidades básicas:

- Realizar cálculos simples operando com as variáveis.
- Compreender por que é possível operar com as variáveis e por que estas operações permitem chegar a um resultado, seja numérico ou não.
- Dar-se conta da importância que tem que conquistar a capacidade de usar as variáveis para modelar matematicamente situações de diferentes tipos.
- Distinguir os diferentes usos da variável em álgebra.
- Passar com flexibilidade entre os diferentes usos das variáveis.
- Integrar os diferentes usos para vê-los como aspectos distintos de um mesmo objeto matemático, que se revelam dependendo da situação particular (URSINI *et al.*, 2005, p. 23).

4.1. A variável como incógnita

De acordo com Ursini *et al.* (2005) para compreender o uso da variável como incógnita específica, o estudante deve ser capaz de reconhecer que uma certa situação está relacionada com uma quantidade cujo valor é desconhecido, e que é possível determiná-lo levando em consideração os dados fornecidos pelo exercício ou problema. Assim, o estudante deve desenvolver a capacidade de representar simbolicamente uma quantidade desconhecida relacionada aos dados fornecidos no problema para desenvolver uma expressão algébrica que

reflita essa relação, para depois realizar operações aritméticas ou algébricas que permitam obter o valor desconhecido. Os autores apresentam três problemas como exemplo do uso da variável como incógnita. São eles:

Exemplo 1: Uma caixa em forma de prisma retangular tem 4,5cm de comprimento e 3cm de altura, seu volume é de 81cm^3 . Quanto mede sua largura? (p. 24)

Exemplo 2: Resolva a equação $8x + 19 = 139$. (p. 25)

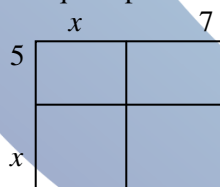
Exemplo 3: O valor da área do quadrado mais 6 é igual a 5 vezes o valor do seu perímetro. Qual é a medida do lado do quadrado? (URSINI *et al.*, 2005, p. 26).

Os autores afirmam que é importante para os estudantes substituir os valores obtidos na equação para verificar se estão corretos e se satisfazem a equação, isto é, que os estudantes façam a “prova real” das soluções encontradas.

4.2. A variável como número genérico

Para Ursini *et al.* (2005) um requisito para compreender o uso da variável como número genérico e poder trabalhar com ela consiste em desenvolver a capacidade de reconhecer padrões, determinar regras, deduzir métodos genéricos e descrevê-las. Os estudantes devem ser capazes de distinguir entre os aspectos invariantes e os que variam em diversas situações, que podem envolver sequências geométricas ou numéricas, ou podem estar relacionadas as estruturas de famílias de problemas. Os autores apresentam alguns problemas como exemplo do uso da variável como número genérico. Apresentarei três deles:

Exemplo 4: Escreva a expressão que representa a área da seguinte figura:



(p. 27)

Exemplo 5: Dada a seguinte lista de números, se denominarmos com a letra n um lugar qualquer da lista, que número estará nesse lugar? (p. 28)

Lugar	1	2	3	...	n	...
Número	30	60	90

Exemplo 6: Desenvolva a expressão $(x + 7)(x - 3) + 2x$. (p. 29)

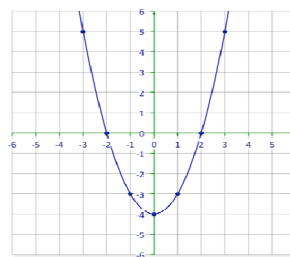
Para esse grupo de pesquisadores, os números genéricos aparecem em expressões abertas, em tautologias, em fórmulas genéricas, como parâmetros em equações, e em equações genéricas. Nesse sentido, os estudantes devem desenvolver a capacidade de interpretá-los como quantidades genéricas e de distingui-los das variáveis simbólicas, que representam quantidades desconhecidas específicas.

4.3. As variáveis em uma relação funcional

No que se refere ao trabalho com variáveis em relações funcionais, Ursini *et al.* (2005) afirma que é necessário que o estudante seja capaz de reconhecer que certas situações estão associadas a quantidades cujos valores estão inter-relacionados e que, nessas situações, a variação de uma quantidade afeta a variação da outra e vice-versa. Este tipo de situação pode relacionar as informações que se apresentam em forma verbal, uma tabela, um gráfico ou forma analítica. Os autores apresentam alguns problemas como exemplo do uso das variáveis em uma relação funcional, dos quais apresentarei dois deles:

Exemplo 9: Considere a expressão $5 - x = y$. Se os valores de x variam entre -4 e 5, quando y alcança seu valor máximo? Quando y alcança seu valor mínimo?

Exemplo 10. Dado o seguinte gráfico:



O que ocorre com os valores de y quando os valores de x crescem?

Para que valores de x os valores de y são positivos?

Para que valores de x os valores de y são negativos? (URSINI *et al.*, 2005, p. 33)

Para os autores é importante que o estudante desenvolva a capacidade de simbolizar uma relação funcional de maneira analítica, estabelecendo uma relação simbólica entre as variáveis relacionadas, independentemente de como se apresente a informação em jogo (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas).

5. O modelo 3UV

Ursini *et al.* (2005), ao analisarem esses três diferentes usos da variável na educação básica identificou uma série de aspectos que correspondem a diferentes níveis de abstração relacionados ao uso da variável por estudantes desse nível de escolaridade. Para os autores o objetivo do ensino da álgebra na educação básica deve ser desenvolver nos estudantes capacidades que os permitam resolver problemas ou exercícios que se relacionam com os diferentes usos da variável (como incógnita, como número genérico e como uma relação funcional).

Esse grupo de pesquisadores apresenta, de maneira sintética, os aspectos que caracterizam cada um dos três usos da variável, denominado por eles de modelo 3UV (três usos da variável).

Para trabalhar com problemas e exercícios relacionados à incógnita (I) é necessário:

- I1.** Reconhecer e identificar em uma situação problemática, a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema.
- I2.** Interpretar a variável simbólica que aparece em uma equação, como a representação de valores específicos.
- I3.** Substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação um enunciado verdadeiro.
- I4.** Determinar a quantidade desconhecida que aparece em equações ou problemas, realizando operações algébricas, aritméticas ou de ambos tipos.
- I5.** Simbolizar as quantidades desconhecidas identificadas em uma situação específica e utilizá-las para formular equações (URSINI *et al.*, 2005, pp. 35-36, grifo dos autores).

Para trabalhar com problemas e exercícios relacionados ao número genérico (G) é necessário:

- G1.** Reconhecer padrões e perceber regras e métodos em sequências e em famílias de problemas.
- G2.** Interpretar a variável simbólica como a representação de uma entidade geral, indeterminada que pode assumir qualquer valor.
- G3.** Deduzir regras e métodos gerais em sequência e em famílias de problemas.
- G4.** Manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica.
- G5.** Simbolizar enunciados, regras ou métodos gerais (URSINI *et al.*, 2005, p. 36, grifo dos autores).

E finalmente, para trabalhar com problemas e exercícios relacionados às que se relacionam as variáveis em uma relação funcional (F) é necessário:

- F1.** Reconhecer a correspondência entre variáveis relacionadas, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas).
- F2.** Determinar os valores da variável dependente, dados os valores da independente.
- F3.** Determinar os valores da variável independente, dados os valores da dependente.
- F4.** Reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação funcional, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas).
- F5.** Determinar os intervalos de variação de uma das variáveis, dado o intervalo de variação da outra.
- F6.** Simbolizar uma relação funcional, com base na análise dos dados de um problema (URSINI *et al.*, 2005, pp. 36-37, grifo dos autores).

Os autores observam que apesar de os aspectos F2 e F3 implicarem no aspecto I4 (determinação do valor da incógnita), estes não são equivalentes, pois para determinar os valores de uma variável em função dos valores da outra é necessário, primeiro, substituir um valor em uma das variáveis e converter, deste modo, a uma expressão que envolva uma relação funcional em uma equação.

Segundo Ursini *et al.* (2005), após se trabalhar com os três usos da variável de forma diferenciada, deve ser prevista uma etapa com atividades denominadas integradoras, que "(...) têm como propósito levar os estudantes a ver a variável como um só conceito que tem diferentes facetas" (p. 59), o que, em última instância, auxiliará os estudantes na compreensão das ideias fundamentais da álgebra.

6. Exemplos de algumas atividades retiradas de livros didáticos relacionadas ao ensino de álgebra e pesquisas relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico utilizando o modelo 3UV

6.1. Modelo de atividade relacionada ao uso da variável como incógnita

Transcrição da atividade: Leia o problema

Em uma papelaria, Célio comprou três lapiseiras iguais e pagou com uma cédula de R\$ 20,00. Sabendo que ele recebeu R\$ 6,20 de troco, qual o preço de cada lapiseira?

Entre as equações abaixo a seguir, copie aquela que corresponde ao problema apresentado, sendo x o preço de cada lapiseira.

I. $20 + 3x = 6,20$

II. $3x - 20 = 6,20$

III. $3x - 6,20 = 20$

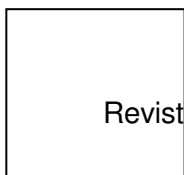
IV. $20 - 3x = 6,20$

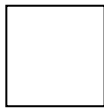
Agora, resolva a equação que você copiou e determine o preço de cada lapiseira.

Atividade proposta por Souza & Pataro (2009, p. 157) para o 7º ano do ensino fundamental.

6.2. Modelo de atividade relacionada ao uso da variável como número genérico

Transcrição da atividade: Para explicar geometricamente por que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ a partir da figura abaixo, é preciso juntar a ela dois retângulos. Copie e complete a figura em seu caderno e explique.

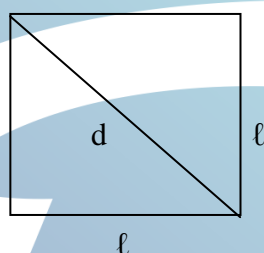




Atividade proposta por Iezzi *et al.* (2009, p. 181) para o 8º ano do ensino fundamental.

6.3. Modelo de atividade relacionada ao uso das variáveis em uma relação funcional

Transcrição da atividade: A medida da diagonal d de um quadrado é uma função da medida ℓ do lado, segundo a lei de associação $d = \ell\sqrt{2}$.



Faça uma tabela como essa em seu caderno completando-a com os valores que faltam.

d (cm)	$3\sqrt{2}$			4	1		$\sqrt{2}$
ℓ (cm)		$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$			$\sqrt{18}$	ℓ

Atividade proposta por Jakubovic *et al.* (2002, p. 192) para o 8ª série do ensino fundamental.

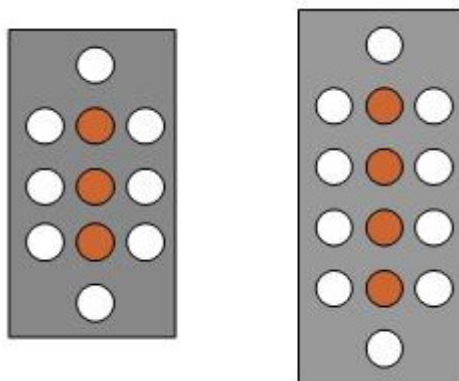
6. Modelo de Atividades integradoras (relacionada aos três usos da variável)

Transcrição da atividade:

A Pizzaria Sole Mio

Em cada questão debes explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para fazer, podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

As figuras mostram duas mesas da Pizzaria Sole Mio, uma com 8 pessoas e 3 pizzas e outra com 10 pessoas e 4 pizzas.



- Sabendo que numa das mesas foram colocadas 10 pizzas, quantas pessoas estariam sentadas?
- E se fossem 31 pizzas, quantas pessoas estariam sentadas nessa mesa?
- O João decidiu comemorar o seu aniversário neste restaurante e convidou 57 pessoas. Quantas pizzas terá que encomendar para a sua mesa?

Atividade proposta por BARBOSA (2011, p. 19) em seu artigo para o desenvolvimento do pensamento algébrico através de atividades de generalização de padrões para estudantes do 6º ano do ensino básico em Portugal.

Transcrição da atividade: A *Moldarte* faz molduras em espelhos rectangulares formadas por azulejos quadrados, como mostra a figura. Explique por palavras, recorrendo a números, a tabelas etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de um espelho com quaisquer dimensões. Formule uma conjectura baseada nos resultados encontrados. Tente chegar a uma generalização. Elabore um relatório escrito sobre o trabalho.



Atividade proposta por Borralho *et al.* (2007, p. 8) em seu artigo para o ensino e aprendizagem de álgebra através de atividades de generalização de padrões para estudantes em Portugal.

7. Considerações finais

O pensamento algébrico amplia a capacidade dos estudantes da educação básica de resolver problemas em diversas áreas do conhecimento se tornando um conhecimento

poderoso para exercer sua cidadania, para o desenvolvimento profissional e para prosseguimento nos estudos. Diversas pesquisas e documentos apresentam problemas no ensino e na aprendizagem em álgebra na educação básica e cabe ao professor propor estratégias para potencializar essa aprendizagem. O modelo dos três usos da variável (modelo 3UV) na educação básica se torna uma alternativa interessante, levando o estudante a construir o conceito de variável sem dar ênfase a processos/algoritmos de resolução de equações e de problemas sem significados, de acordo com Borralho *et al.* (2007, p. 2) “a álgebra é mais que manipulação simbólica e resolução de equações”. Com essa proposta alternativa, espera-se que os professores possam se apropriar dessa estratégia em suas aulas para potencializar o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus estudantes e melhorar a aprendizagem do conceito de variável.

Referências

- ALVARENGA, D.; VALE, I. **A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico.** Quadrante, XV, I, p. 27-55, Portugal, 2007.
- BARBOSA, A. **Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo no 6º ano de escolaridade.** In: MARTINHO, M. H.; FERREIRA, R. A.; VALE, I.; PONTE, J. P. (Eds). Ensino e aprendizagem da álgebra. Atas do EIEM 2011. Póvoa do Varzim: APM, 2011.
- BECHER, E. L.; GROENWALD, C. L. O. **Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio.** X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009.
- BORRALHO, A.; CABRITA, I.; PALHARES, P.; VALE, I. **Os padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra.** In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Orgs). Números e Álgebra, pp. 193-201, Lisboa: SEM-SPCE, 2007.
- BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.** Mestrado em Educação, Área de especialização em Didática da Matemática. Faculdade de Ciências – Departamento de Educação. Universidade de Lisboa, 2008.
- BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular: educação infantil e ensino fundamental**, versão final, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf
- BRASIL, MEC. **Secretaria de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** MEC/SEB, 2000.
- CARMO, P. F. **Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental.** 107 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2014.
- FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** In: Seminário Luso-Brasileiro de investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005.
- FOSSA, J. A. **O ensino do conceito de variável.** Editora Livraria da Física, 2011.

HAMAZAKI, A. C. **Análise da situação de aprendizagem sobre equações e inequações logarítmicas apresentada no Caderno do Professor de 2009 do Estado de São Paulo.** 132 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2010.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade.** Livro didático, 8º ano do Ensino Fundamental, 6 ed. São Paulo: Atual, 2009.

JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M.; CENTURIÓN, M. **Matemática na medida certa.** Livro didático, 8ª série do Ensino Fundamental, São Paulo: Scipione, 2002.

PONTE, J. P. **Álgebra no currículo escolar.** Educação Matemática. In: XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática, Caminha, p. 36-42, 2005.

SESSA, C. **Iniciación al estudio didáctico del Álgebra, Orígenes y perspectivas.** Formación docente – Matemática. 1ª edição. Libros Del Zorzal, 2005.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber Matemática.** Livro didático, 7º ano do Ensino Fundamental, 1 ed. São Paulo: FTD, 2009.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis.** In: COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. As ideias da álgebra. Atual Editora, pp. 9-22, 1995.

URSINI, S.; ESCAREÑO, F.; MONTES, D.; TRIGUEIROS, M. **Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa.** México: Trilhas, 2005.