

**SUPERFÍCIES QUÁDRICAS E O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA:  
INTERSEÇÕES NA PESQUISA<sup>1</sup>****QUADRIC SURFACES AND THE TEACHING OF ANALYTIC GEOMETRY:  
INTERSECTIONS IN RESEARCH****Andressa Franco Vargas<sup>2</sup>**  
**José Carlos Pinto Leivas<sup>3</sup>****RESUMO**

O presente trabalho é fruto de uma disciplina ofertada em um Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, no qual se buscou explorar ligações entre conceitos oriundos tanto da Geometria Analítica quanto da Álgebra Linear. Assim, esta pesquisa se volta ao tema das superfícies quádricas, sua aplicação no eixo da Geometria Analítica e suas possíveis ligações com o eixo da Álgebra Linear. Desse modo, nosso objetivo, neste trabalho, foi mapear as produções que contemplassem o tema, a fim de verificar o que estas trazem de aplicações e conceitos relativos às superfícies quádricas e à Geometria Analítica. Com isso, esta pesquisa está estruturada do seguinte modo: primeiramente, conceituamos as superfícies quádricas e seus tipos, enfatizando, ainda, uma das possíveis relações desse tema com a Geometria Analítica; posteriormente, apresentamos o mapeamento realizado em duas plataformas digitais de teses e dissertações em busca de produções sobre o tema, bem como a posterior análise das referidas produções. A modo de conclusão, observamos muitas fragmentações com relação ao ensino de Matemática, pois, ao analisar as produções, verificamos que, as superfícies quádricas não foram conectadas a nenhum outro conceito/conteúdo e sim, foi trabalhada de forma individual.

**Palavras-chave:** Superfícies Quádricas, Ensino de Matemática, Geometria Analítica.

**ABSTRACT**

The present work is the result of a discipline offered in a Postgraduate Program in Science and Mathematics Teaching, which sought to explore links between concepts from oth Analytical Geometry and Linear Algebra. Thus, this research focuses on the theme of quadric surfaces, their application on the axis of Analytical Geometry and their possible links with the axis of Linear Algebra. Thus, our objective in this work was to map the productions that contemplated the theme, in order to verify what they bring from Applications and concepts related to quadric surfaces and Analytical Geometry. Whit this, this research is structured as follows: first, we conceptualize the quadric surfaces and their types, emphasizing also one of the possible relations of this theme with Analytical Geometry; Subsequently, we present the mapping performed on two digital thesis and dissertation plataforms in search of productions on the theme of quadrics, as well as the subsequente analysis of these productions. In conclusion, we observe many fragmentations regarding the teaching of mathematics, because when analyzing the productions, we found that the quadric surfaces were not connected to any other concept / content, but was worked individually.

**Keywords:** Quadrics Surfaces, Mathematics Teaching, Analytical Geometry.

<sup>1</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

<sup>2</sup> Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana. E-mail: andressavargas1@yahoo.com.br

<sup>3</sup> Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana. E-mail: leivasjc@yahoo.com.br

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é oriundo da disciplina de Fundamentos de Álgebra Linear e Geometria Analítica, ministrada em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática de uma universidade da região central do Estado do Rio Grande do Sul- RS. A referida disciplina busca evidenciar ligações entre conceitos da Geometria Analítica e sua aplicação no Ensino Básico, contemplando juntamente tópicos do eixo de Álgebra Linear.

Nessa direção, é relevante que os participantes busquem fundamentar, com base na literatura e pesquisas relacionadas à área, o que existe e como realizar a transposição entre os temas abordados na disciplina e o que se adéqua ao ensino básico, por exemplo. Dessa forma, a presente pesquisa tem por objeto de estudo uma revisão de literatura sobre o tema quádricas, buscando discutir sua relação com a Geometria Analítica, propriamente dita, e os aspectos algébricos e representações visuais destas superfícies. Entendemos que esses últimos aspectos deixam a desejar na formação inicial dos professores e pouco, ainda, é explorado nas pesquisas.

Para tal, realizamos uma pesquisa que envolvesse o tema em questão, neste caso, especificamente, o assunto das superfícies quádricas e sua aplicabilidade na Geometria Analítica, com conotações geométricas para além da algébrica. Desse modo, estabelecemos como objetivo inicial mapear as produções que contemplassem o tema e o que o mesmo contribui com o Ensino de Geometria Analítica, de modo a verificar o que as produções trazem de aplicações e conceitos relativos a ele.

Ao realizarmos tal mapeamento, acreditamos poder oferecer subsídios a novas pesquisas que possibilitem indicar alternativas de explorar o tema na própria disciplina de Geometria Analítica, eliminando lacunas que poderão contribuir para um melhor desempenho dos estudantes nas disciplinas de Cálculo, por exemplo, que necessitam de tais conhecimentos, especialmente, os visuais.

Historicamente, após os estudos de Euclides em Geometria, a dita Geometria Euclidiana, surge a Geometria Analítica, com os fundamentos de René Descartes. Para Lima e Gomes (2018, p. 11),

Durante o processo de desenvolvimento e estabelecimento do método analítico para a resolução de problemas geométricos, duas críticas

foram bastante constantes: (i) A arbitrariedade aparentemente inútil de se utilizar um referencial, isto é, escolher um sistema de coordenadas que, apesar de fundamental para a resolução, não existia *a priori*; (ii) A introdução da linguagem algébrica, ocasionava, em muitos casos, um excesso de cálculos e, conseqüentemente, com a utilização do formalismo algébrico, as etapas do raciocínio ou o senso geométrico acabavam sendo substituídos por uma grande quantidade de equações e de notações.

Ao que tudo indica, parece que essa crítica faz sentido, ainda nos dias de hoje, pois, segundo nossa experiência e o levantamento que apresentaremos no artigo, esses aspectos ainda subsistem, muito embora, nesse movimento no cenário geométrico, encontramos novas alternativas, para um ‘novo fazer’ em Geometria com a Álgebra Linear. Ao investigar sobre interpretação de vetores no espaço, Hamilton <sup>4</sup>

desenvolve a teoria dos quatérnios, cujos estudos foram fundamentais para a emergência da Álgebra Linear, uma vez que suscitaram a exploração das estruturas lineares de dimensão maior do que três e desempenharam um importante papel para o desenvolvimento do conceito de estrutura algébrica” (LIMA e GOMES, 2018, p. 13).

A partir dessa movimentação no cenário geométrico, julgamos importante aprofundar conhecimentos geométricos, como o relativo à quádricas, pouco ou nada desenvolvidos nos programas de formação inicial do professor de Matemática, a fim de tornar as disciplinas modernizadas sem perder a essência dos conteúdos.

Ainda, ressaltamos que nem em cursos de Álgebra Linear o tema é explorado de modo geral (CORREA, 2010). Assim, a presente pesquisa se faz necessária para contribuição e análise do que está sendo feito em termos de produções para melhorar este cenário, logo, buscamos compreender como e de que formas o Ensino de Geometria está conectado ao conteúdo de Superfícies Quádricas.

Deste modo, este estudo está estruturado da seguinte forma: primeiramente descrevemos o conceito e os tipos de superfícies quádricas, posteriormente discutimos questões voltadas ao Ensino de Geometria Analítica. Após, retratamos uma das possíveis conexões da Geometria com as Quádricas, e por fim, apresentaremos o mapeamento realizado nas plataformas digitais com o intuito de discutir sobre o tema, seguido das considerações finais do presente estudo.

<sup>4</sup> Willian Rowan Hamilton, consagrou-se na História da Matemática, especialmente pela álgebra dos quatérnios, a primeira álgebra não-comutativa a qual abriu as portas da álgebra abstrata.

**2 QUÁDRICAS: CONCEITO E TIPOS**

Chama-se superfície quádrica uma equação do 2º grau que assume x, y e z como variáveis. Dessa forma, temos que:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0.$$

Ainda, um dos coeficientes (A, B, C, D, E ou F), ao menos, deve ser não nulo, pois a equação perderia a característica de ser do 2º grau. (WINTERLE, 2000)

Desse modo, temos um objeto tridimensional, gerado pelas variáveis x, y e z, considerando o sistema cartesiano ortogonal. No entanto, quando houver uma transformação de coordenadas, quer por rotação ou por translação de eixos, obtemos equações do tipo:

a) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$ (1) Quádricas cêntricas
b) $Ax^2 + By^2 = Cz$
$Ax^2 + Bz^2 = Cy$
$Ay^2 + Bz^2 = Cz$ (2) Quádricas não cêntricas

**Quadro 1 – Tipos de Equações.**  
Fonte: Lehmann (1970)

As equações com características do tipo 1 têm como centro de simetria sua origem, e, por isso, são chamadas de superfícies quádricas cêntricas. As superfícies do tipo 2, em contrapartida, diferem das anteriores por não terem centro de simetria e, por esse fato, são denominadas superfícies quádricas não cêntricas. Ao adentrarmos nesses dois tipos de quádricas, decidimos construir um quadro com os lugares geométricos gerados por cada um deles. O Quadro 1 dispõe os coeficientes e o lugar geométrico gerado por algumas situações construídas para a abordagem deste trabalho.

<b>Coeficientes (A, B e C)</b>	<b>Lugar Geométrico</b>
Todos Positivos	Elipsoide
Dois positivos e um negativo	Hiperboloide de uma folha
Um positivo e dois negativos	Hiperboloide de duas folhas
<b>Coeficientes (A e B)</b>	<b>Lugar Geométrico</b>
Mesmo sinal	Paraboloide Elíptico
Sinais Opostos	Paraboloide Hiperbólico
Um zero	Superfície Cilíndrica Parabólica Reta

**Quadro 2 – Tipos de Superfícies Quádricas**  
Fonte: Adaptado de Lehmann (1970)

Descreveremos, brevemente, alguns lugares geométricos destacados no Quadro 2 de forma algébrica. Começando pelas quádricas cêntricas, apresentamos o elipsoide e o hiperboloide de uma e duas folhas. Nas quádricas não cêntricas, abordaremos um pouco sobre o paraboloides elíptico e o hiperbólico.

**O Elipsoide:** Esta quádrica cêntrica é produto de uma rotação de uma elipse em torno de um eixo. Esse movimento gera uma equação do tipo  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  distintos e  $x$ ,  $y$  e  $z$  não nulos. (STEIMBRUCH, WINTERLE, 1987, p. 276)

**O Hiperboloide de uma folha:** a quádrica apresenta dois coeficientes positivos e um negativo, porém o valor negativo varia de acordo com nosso eixo de rotação, Assim, temos os seguintes casos:

a) Rotação em torno do eixo  $x$ :  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

b) Rotação em torno do eixo  $y$ :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

c) Rotação em torno do eixo  $z$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Quádricas com essas características podem apresentar três tipos de seções planas, sendo elas hipérbolas, retas e elipses. (STEIMBRUCH, WINTERLE, 1987, p. 278-279).

**Hiperboloide de duas folhas:** um hiperboloide de duas folhas é gerado a partir da rotação de uma hipérbole ao redor do seu eixo. Assim, temos três tipos possíveis de equações:

a) Para o hiperboloide estar ao longo do eixo  $x$ , ele deve ser descrito pela equação:  $+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

b) Para o hiperboloide estar ao longo do eixo  $y$ , ele deve ser descrito pela equação  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

c) Para o hiperboloide estar ao longo do eixo  $z$ , ele deve ser descrito pela equação  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (STEIMBRUCH, WINTERLE, 1987, p. 280).

**Paraboloides Elíptico:** Temos um paraboloides elíptico quando apenas um dos coeficientes dos termos em  $x^2, y^2$  e  $z^2$  é nulo. Nesse caso, a representação geométrica tem formato oval, podendo assumir pontos de máximo e de mínimo. Quando  $a = b$ , temos um paraboloides circular, e quando  $a \neq b$ , temos um paraboloides elíptico, sendo

este último definido por equações como:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - cx = 0$  (STEIMBRUCH, WINTERLE, 1987, p. 282)

**Paraboloide Hiperbólico:** esta quádrlica é conhecida por ter o formato de uma sela e por conter apenas um dos coeficientes de  $x^2, y^2$  e  $z^2$  nulo. O paraboloide hiperbólico pode ser descrito pela equação:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - cz = 0$  (STEIMBRUCH, WINTERLE, 1987, p. 284).

Optamos por esta forma de caracterizar as equações das superfícies quádrlicas por as julgarmos mais próximas da realidade de estudantes, por exemplo, de primeiro ou segundo ano da Licenciatura em Matemática e possibilidades de ir empregando tais conceitos, principalmente, em integrais duplas e triplas no Cálculo. No entanto, Anton e Busby (2006) fazem outro caminho, a saber, exploram os autovalores de matrizes positivas definidas. Com isso, os autores se fixam principalmente em cálculos e deixam os aspectos visuais geométricos a mercê de exercícios e aplicações a máximos e mínimos no envolvimento com o teste da derivada segunda.

Na sequência deste estudo, iremos estabelecer uma das possíveis relações que as superfícies quádrlicas podem ter com o eixo da Geometria Analítica.

### ***2.1 Relações com a Geometria Analítica***

Para aproximar o estudo das superfícies quádrlicas da Geometria Analítica com os aspectos visuais da Geometria Euclidiana, escolhemos explorar a rotação de superfícies de revolução em torno dos eixos contidos em  $\mathbb{R}^3$ .

Uma superfície de revolução pode ser definida como uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana dada em torno de uma reta fixa no plano da referida curva. A curva plana é denominada geratriz e a reta fixa de eixo de revolução ou de superfície. Qualquer posição que a geratriz possa assumir é nomeada de seção meridiana e cada uma das secções produzidas na superfície são chamados de paralelos da superfície.

Desse modo, conseguimos observar que curvas como elipses, hipérboles se transformam em superfícies quádrlicas quando as rotacionamos em torno de um eixo. Tomamos, como exemplo, a seguinte questão:

a) Dada a equação  $2x^2 - 4z^2 = 25$ . Realizamos rotações em torno dos eixos dos  $x$  e dos  $z$ .

Primeiramente, tomamos um ponto  $A(x, 0, z)$  pertencendo a hipérbole ( $2x^2 - 4z^2 = 25$ ). Para rotacioná-la em torno do eixo dos  $x$ , na equação da hipérbole, isolamos o termo  $z$ , e com isso chegamos a seguinte equação:

$$-4z^2 = 25 - 2x^2$$

$$z^2 = \frac{2x^2 - 25}{4}$$

Ao girar essa curva em torno do eixo dos  $x$ , a rotação de um ponto  $A(x, 0, z)$  gera uma circunferência de centro  $C(x, 0, 0)$ . Dado um ponto  $B(x, y, z)$  que pertence a essa circunferência, temos que a distância de  $B$  até  $C$  é igual a distância de  $A$  até  $C$ , isto é,  $\overline{BC} = \overline{AC}$ , a qual corresponde a medida do raio da circunferência. Calculando tais distâncias, temos:

$$\sqrt{(x - x)^2 - (0 - y)^2 - (0 - z)^2} = \sqrt{(x - x)^2 - (0 - 0)^2 - (0 - z)^2}$$

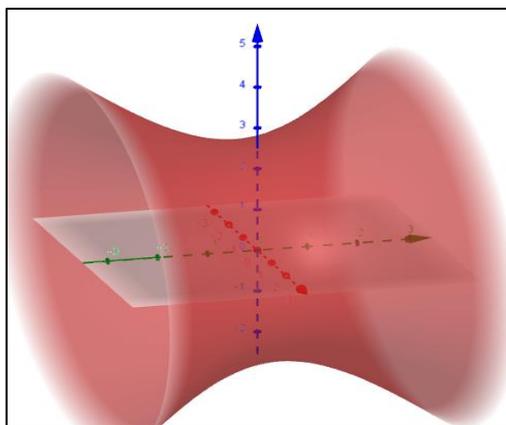
$$y^2 - z^2 = z^2$$

$$y^2 - z^2 = \frac{2x^2 - 25}{4}$$

$$4y^2 - 4z^2 - 2x^2 = -25$$

$$2x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 25$$

Essa última equação gera uma região que está representada na figura 1, um hiperboloide de uma folha.



**Figura 1** – Hiperboloide de uma folha  
**Fonte:** autoria própria

Na rotação em torno do eixo  $z$ , tivemos que realizar algumas modificações, de forma que consideramos a mesma equação da hipérbole e isolamos o termo  $x$ , obtendo a equação  $x^2 = \frac{25+4z^2}{2}$ . Ao girar a curva em torno do eixo  $z$ , a rotação de um ponto  $A(x, 0, z)$  descreverá uma circunferência cujo centro é dado por  $C(0, 0, z)$ . Sendo  $B(x, y, z)$  um ponto dessa circunferência, temos que  $\overline{BC} = \overline{AC}$ .

Página | 44

$$\sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + (0-0)^2 + (z-z)^2}$$

$$x^2 - y^2 = x^2$$

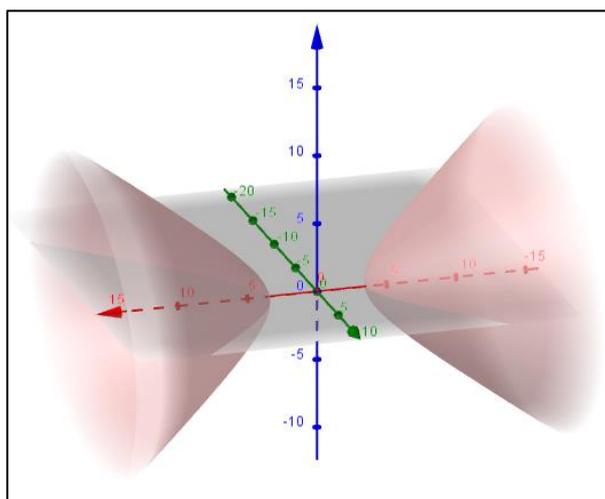
Substituindo a primeira equação, temos:

$$x^2 - y^2 = \frac{25 + 4z^2}{2}$$

$$2x^2 - 2y^2 = 25 + 4z^2$$

$$2x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 25.$$

Essa equação gera o lugar geométrico destacado na Figura 2, construída no software GeoGebra.



**Figura 2** – Hiperboloide de Duas Folhas

Fonte: autoria própria

Podemos observar que conseguimos trabalhar sob a perspectiva da Geometria Analítica para exemplificar conceitos, neste caso, vistos em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral.

### 3 O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

O ensino de Geometria em si ainda é uma pauta pouca explorada, tanto na Educação Básica como no nível superior (LEIVAS, 2009, RICHIT, 2005), e este cenário se torna ainda pior quando discutimos o ensino de Geometria Analítica. Diante disso, se faz necessário o debate sobre o tema e a busca por alternativas para sanar estas lacunas existentes, levando em conta o fato de que a Geometria Analítica não consiste apenas em aplicações de conceitos que são oriundos de outras áreas, e que a mesma pode proporcionar um diálogo entre os conceitos da Geometria e da Álgebra. (CARDOSO e NEHRING, 2014, p.3)

Assim, destacamos como sendo de extrema importância a discussão de conceitos provenientes da Geometria Analítica, de modo que o aluno consiga estabelecer relações entre estas áreas da Matemática, interpretando geometricamente e algebricamente, pois segundo Richit (2005), o ensino de Geometria Analítica deve proporcionar aos alunos momentos para o desenvolvimento da capacidade de interpretar geométrica e algebricamente problemas.

Diante disso, nos resta questionar quais são os motivos para a compartimentalização existente no Ensino de Matemática. Lorenzato (1995) responde, argumentando que muitos professores não têm conhecimentos geométricos necessários para sua prática, e conseqüentemente não possuem condições para estabelecer as possíveis conexões entre a Álgebra e a Geometria, e que, ainda, este ato faz com que nossos alunos façam parte de um círculo, na qual a geração que não aprendeu e não explorou a Geometria não sabe ensiná-la, o que acaba por se constituir em um ciclo sem conhecimento geométrico algum.

As orientações curriculares que norteiam a prática dos professores no Ensino Médio apontam ser de extrema valia a articulação entre conceitos geométricos e algébricos, uma vez que os mesmos podem ser trabalhados de forma conjunta, por meio de duas alternativas: a) o entendimento de figuras geométricas por meio de equações; b) o entendimento de equações por via geométrica. (BRASIL, 2006)

Ainda, Richit (2005, p. 41) destaca que “a Geometria Analítica, bem como o ensino da mesma, se constituem como um alicerce básico para os cursos de Licenciatura em Matemática, Ciências Exatas como as Engenharias, e ainda em cursos voltados para

Computação Gráfica, sendo esta um dos expoentes para o desenvolvimento destas áreas”.

Por fim, destacamos o quão é necessária à busca por alternativas para suprir as necessidades dos alunos, de modo que os mesmos passem a atribuir significados aos conhecimentos trabalhados em sala de aula e, a partir disso, passem a ser estimulados a desenvolver habilidades para a resolução de problemas, podendo estes ser oriundos de áreas distintas no ramo da Matemática.

#### 4 INTERSEÇÕES NA PESQUISA

A fim de cumprir com o objetivo de mapear as produções, que contemplassem o tema de modo a verificar o que as mesmas trazem de aplicações e conceitos relativos sobre as superfícies quádricas e a Geometria Analítica e o ensino da mesma, delineamos uma pesquisa qualitativa no sentido apontado por Moreira (2011, p. 58) de que “o pesquisador qualitativo procura um entendimento interpretativo de uma realidade socialmente construída na qual ele está imerso”. Nesse sentido a busca em documentos, no caso, produções acadêmicas, que levassem ao conhecimento de uma área específica da Matemática poderia proporcionar o início de novas pesquisas a respeito, inclusive na busca de alternativas metodológicas para desenvolver o conteúdo específico.

Portanto, o presente artigo trata de uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico ou histórico-bibliográfico, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006). Os autores também a denominam como ‘estudo documental’ uma vez que o “exame de documentos pode ser uma técnica útil de investigação se o pesquisador conseguir construir categorias de análise” (p.103), as quais devem refletir o propósito da pesquisa, o que, em nosso caso se constitui, pelo mapeamento, de saber o que exatamente está ocorrendo com o estudo de quádricas em dissertações e teses na área de Matemática.

A partir disso, com o intuito de mapear as produções sobre o tema, realizamos uma busca em duas plataformas digitais, a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD)<sup>5</sup> e o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Biblioteca Digital de Teses e Dissertações. Disponível em: <http://bdt.d.ibict.br/vufind/>

<sup>6</sup> Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

Na primeira busca utilizamos os descritores “Superfícies Quádricas” AND “Geometria Analítica”. Após esse refinamento, dois trabalhos foram encontrados, um em cada plataforma. Insatisfeitos com o resultado, resolvemos manipular os descritores de busca e adaptá-los para os seguintes termos: “Quádricas” AND “Geometria Analítica”. Nessa segunda busca, foram encontradas quatro produções na plataforma da CAPES e mais quatro na plataforma BDTD. Porém, ressaltamos que dois dos quatro trabalhos encontrados se repetem nas duas plataformas.

Portanto, ficamos com o total de seis produções para serem analisadas, as quais estão sintetizadas na Tabela 1, onde constam os trabalhos encontrados, seus autores, instituição, ano de publicação e programa de pós-graduação. Todas as produções citadas se referem a dissertações. Assim, analisamos os resumos e as palavras-chave, a fim de verificar os objetivos e a abordagem dada para o tema deste trabalho.

**Tabela 1** - Organização das produções encontradas na busca inicial

<b>Autor</b>	<b>Ano</b>	<b>Título</b>	<b>Instituição</b>	<b>Programa</b>
Antônio Simões Gaspar	2014	As cônicas, quádricas e suas aplicações	Universidade de Brasília	Programa de Pós-Graduação em Matemática
Juliana Mauri Correa	2010	Superfícies Quádricas: Transformação das Coordenadas	Universidade Estadual Paulista	Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática
Ronald Gama Silva	2016	Reconhecimento de Quádricas via diagonalização de matrizes	Universidade Federal do Sergipe	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Luiz Fernando Giolo Alves	2016	Uma abordagem do estudo de cônicas e quádricas com o auxílio do software GeoGebra	Universidade Estadual Paulista	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Nandyne Londero	2017	Explorando recursos no GeogebraBook no estudo de quádricas a partir de diferentes representações	Universidade Federal de Santa Maria	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
Janine Freitas Mota	2010	Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando secções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Fonte: Dados da Pesquisa

Dos seis trabalhos analisados, um foi excluído por não ter resumo disponível para acesso, e os demais serão relatados, brevemente, a seguir. A primeira produção a ser explorada é a de Gaspar (2014), a qual trata da importância de se aliar os conteúdos do Ensino Superior aos (conteúdos) do Ensino Básico, por exemplo, a aplicação de alguns desses tópicos ao cotidiano, de forma a propiciar um ensino mais contextualizado.

O autor tem como objetivo pesquisar as principais propriedades das cônicas e quádricas, sistematizando-as. Seu foco são aulas com propostas mais interessantes e que respondam aos questionamentos dos alunos, o que faria, conseqüentemente, que estes fossem tomados pelo interesse no estudo.

Gaspar (2014) buscou desenvolver teoricamente tópicos como: a) translação e rotação em eixos coordenados; b) sistema de coordenadas cartesianas e polares; c) cônicas e quádricas. Após esse apanhado teórico, o autor busca estabelecer relações do que foi apresentado com vários ramos da ciência, discutindo possíveis aplicações. Para isso, toma como norte elementos que fazem parte de nosso cotidiano, isto é, sobre os quais temos conhecimento.

Percebemos dessa produção que, embora o autor tenha indicado a importância do tema para aliar conteúdo do Ensino Superior ao do Ensino Básico, o mesmo ficou no plano teórico e não apresentou possibilidades e indicativos de como seriam prováveis conexões a serem estabelecidas.

A próxima produção analisada foi a de Correa (2010), a qual trata das superfícies quádricas e da transformação de coordenadas, tendo como objetivo propor duas formas de apresentação do conteúdo relativo ao estudo da equação geral de uma quádrica. A autora propõe atividades para dois grupos de alunos em diferentes níveis, sendo uma para ingressantes de cursos na Área de Ciências Exatas e da Terra e outra para alunos que ainda não tiveram contato com as disciplinas que envolvem noções de Álgebra Linear.

As atividades propostas nesse estudo foram divididas em dois momentos: no primeiro, são apresentados aos alunos os conceitos e os tipos de superfícies quádricas, dentro do contexto apropriado a um curso de Geometria Analítica; No segundo, o estudo foi dirigido sobre o mesmo tema, porém com conotações a um curso de Álgebra Linear.

Para o curso de Geometria Analítica, Correa (2010) propôs envolver temas como: a) Translação e Rotação no espaço; b) Aplicação da translação e da rotação no espaço ao estudo da equação de quádricas; c) Redução da equação de quádricas; d) Aplicações dos conceitos citados.

Para o curso de Álgebra Linear, a autora prevê o estudo sobre espaços e subespaços vetoriais, operadores lineares, autovalores e autovetores, classificação das quádricas e aplicações.

Após as aulas aplicadas, a pesquisadora delimitou um exemplo referente ao tema das quádricas e, assim, conseguiu aliar tópicos trabalhados nos dois cursos ministrados, isto é, tanto no de Álgebra Linear quanto no de Geometria Analítica.

Percebemos potencial nessa dissertação, em contraposição ao proposto na anterior, uma vez que ao abordar translações e rotações pode conectar com o tema matrizes, usualmente, abordadas no Ensino Médio. Por outro lado, ao tratar dos autovalores e autovetores vai ao encontro do que fazem Anton e Busby (2006).

A próxima dissertação analisada tem como autor Silva (2016). O pesquisador buscou discutir o reconhecimento das quádricas sob a perspectiva da diagonalização de matrizes. Para isso, tem como objetivo promover o reconhecimento destas por meio de uma simplificação da forma quadrática associada, cujo procedimento envolve a diagonalização de matrizes simétricas.

Após, o autor buscou explicar, por meio de conceitos e exemplos, o assunto central de sua produção. Porém, o estudo se caracteriza por ser apenas teórico, de forma que não há aplicações em uma turma ou em um curso que contemplasse o tema.

A análise feita mostra que, embora a autora realizasse um mestrado profissional, no qual a importância é descrever um produto educativo, isso não ocorreu.

Dando continuidade, prosseguimos com a análise das produções, enaltecendo, desta vez, a dissertação de Alves (2016), a qual trata de um estudo sobre cônicas e quádricas com o auxílio do software GeoGebra. Para isso, o autor traçou como objetivo auxiliar professores e estudantes a terem uma visão mais concreta e dinâmica desses elementos com o referido software, de distribuição livre.

Nesse sentido, a autora dividiu seu estudo em dois momentos: primeiramente, buscou compreender as cônicas e as ferramentas que o software contém para facilitar o entendimento dos significados, parâmetros e coeficientes das equações ditas

quadráticas. Posteriormente, foram exploradas algumas particularidades que geralmente não são vistas quando se trabalha com turmas de Ensino Médio. A autora buscou relacionar o conteúdo de quádricas com o assunto de matrizes, exemplificando que a equação geral de uma quádrica pode ser descrita a partir de um produto entre matrizes, o que nos remete a ideia de uma rotação por meio de matrizes. Isso conduz à conexão esperada entre o Ensino Superior e o Ensino Básico, pois nesse último, as vezes, o estudo de matrizes é feito pura e simplesmente por algoritmos de cálculos sem interpretações geométricas.

Alves (2016) explorou as matrizes para explicar “rotação”, “translação”, “invariantes” e “centro” de uma quádrica, ou seja, conceitos que podem ser implementados em uma classe de Ensino Médio. Por sua vez, a Geometria Dinâmica empregada possibilita e favorece os aspectos visuais envolvidos nas superfícies e demais entes geométricos.

A próxima produção analisada foi a de Londero (2017), onde a autora buscou explicar como as potencialidades do GeoGebraBook, podem ser exploradas no estudo de superfícies quádricas, a fim de gerar um material didático em que diferentes representações estejam presentes e possam ser relacionadas entre si.

Para isso, a autora traçou duas metas: na primeira, voltou-se à análise e à identificação de trabalhos de programas de pós-graduação que abordassem o tema deste estudo. Na segunda, considerou as potencialidades da plataforma GeoGebra para a composição de um GeoGebraBook, com o intuito de produzir recursos didáticos que pudessem auxiliar no entendimento sobre o conteúdo de superfícies quádricas.

No intuito de contemplar os objetivos citados, a autora realizou um levantamento sobre o tema, bem como a construção de uma fundamentação teórica para o estudo, apresentando algumas potencialidades do uso do GeoGebra. Por fim, Londero (2017) buscou obras que continham aspectos referentes a Geometria Analítica, especialmente no que diz respeito às quádricas, e analisou como os exercícios e o conteúdo são abordados nessas produções. Essa busca forneceu subsídios para a construção do GeoGebraBook, o qual apresenta 12 atividades elaboradas com base nos exercícios analisados nos livros.

As atividades buscaram contemplar conceitos amplos e variados, oportunizando ao usuário a visualização e discussão dos conceitos abordados. Assim, parece que tal

trabalho de pesquisa envolve possibilidades mais atuais de desenvolver o conteúdo ao aliar o software, a realização de tarefas e o envolvimento com o livro didático.

A última produção trata da dissertação de Mota (2010), a qual não tivemos acesso ao arquivo ou resumo.

Para concluir a análise realizada, o que se pôde observar nas produções foi a preocupação de procurar diversos recursos para acabar com o distanciamento entre conceitos da Geometria Analítica e o tópico de Superfícies Quádricas. Essa disjunção ocorre, por vezes, porque esquecemos que as origens de conceitos mais complexos estão diretamente ligadas àqueles simples, os quais, de certa forma, são contemplados na Educação Básica, como os movimentos rígidos no plano, os quais podem ser abordados a partir do estudo de matrizes, não ficando apenas em discutir propriedades operatórias das mesmas.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Observamos, nas produções analisadas, diferentes visões sobre o mesmo tema, ou seja, como ensinar, quais as ferramentas para isso, o quão é importante a valorização da Educação Básica durante a expansão de conteúdos no Ensino Superior e como as tecnologias podem ser uma alternativa para a aprendizagem e o ensino do tema em questão.

Frente a isso, destacamos que duas das produções analisadas se preocuparam com conceitos simples oriundos da Educação Básica. Assim, Silva (2016) e Gaspar (2014) nos remetem o quanto é importante começar construindo uma base sólida e que se faz necessária a preocupação do como ensinar e como estabelecer conexões entre conceitos mais elaborados e mais simples.

Outro ponto de ressalva foi à inserção da tecnologia como ferramenta de auxílio no ensino e na aprendizagem de Geometria. Londero (2017) e Alves (2016) trazem como elemento chave em suas pesquisas a tecnologia e como a mesma pode contribuir para uma melhor compreensão e visualização dos conceitos estudados. Assim, os softwares GeoGebra e GeoGebraBook foram instrumentos de auxílio para potencializar o Ensino de Geometria Analítica nestes casos.

Ainda, Correa (2010) faz uma comparação interessante sobre a abordagem e o ensino de Geometria em diferentes cursos de nível superior. A mesma faz um panorama de como o tema “quádricas” é apresentado num curso de Álgebra Linear, bem como em um curso de Geometria Analítica. Após, sua análise conclui que há uma grande disparidade quanto à abordagem do tema, de modo que cada curso estabelece uma visão mais fechada sobre seu referente e isso, por sua vez, nos remete à ideia de uma compartimentalização de conteúdos.

Deste modo, ressaltamos a preocupação dos pesquisadores de modo geral sobre como é ensinado o conteúdo de quádricas e quais as perspectivas da inserção de tema nas aulas de Geometria Analítica e como o mesmo pode ser ensinado e conectado com outros conceitos. Devido a isto, acreditamos que, mesmo que alguns autores e professores busquem diversas alternativas para se flexibilizar o ensino, é extremamente necessário o domínio do conteúdo e a criatividade de modo que o aluno tenha interesse em aprender, pois o ato de ensinar exige a existência de quem ensina e de quem aprende, e aprender não é uma tarefa fácil. (FREIRE, 2001).

## 6 CONCLUSÃO

Apontamos como uma consideração importante da pesquisa bibliográfica feita em dissertações (não havia teses) a pouca quantidade de produções envolvendo superfícies quádricas do ponto de vista da Educação Matemática e do ensino nessa área. Além disso, nossa busca verificou que os poucos trabalhos encontrados, menos ainda são aqueles que estabelecem conexões entre o conteúdo em níveis de conhecimento/didática distintos, centrando-se mais em pesquisas teóricas.

Podemos pensar que uma das causas para isso seja a dificuldade de observar a interligação de conceitos oriundos de diferentes tópicos. Entendemos que a facilidade em pensar separadamente em conteúdo, cada um em sua “caixa”, acaba por extinguir a construção de conexões entre conteúdos de diferentes áreas da Matemática e em diferentes níveis de ensino, o que entendemos ser essencial para que ocorra um processo de aprendizagem gradual.

Logo, se a partir de cada conteúdo da Educação Básica pudéssemos construir conceitos mais elaborados, a aprendizagem seria, acreditamos, um ato constante e em

evolução. Destacamos que os trabalhos encontrados, da mesma forma que o nosso, preocuparam-se em explorar o tema quádricas por outros caminhos, tratando de conceitos como matrizes e suas operações, autovalores, autovetores e vetores unitários, todos os conteúdos que podem ser estudados no decorrer da Educação Básica. Isso no devido nível de aprofundamento teórico, sendo que os aspectos visuais muito bem podem ser explorados intuitivamente, por exemplo, com o uso de softwares como o Geogebra.

No Ensino Superior, o tema das quádricas costuma ser trabalhado em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, sem nenhuma ou pouca exploração de conceitos oriundos da Geometria Analítica e até mesmo daqueles de matrizes do Ensino Médio, envolvendo, por exemplo, as matrizes de rotação, o que nos remete a dissertação de Silva (2016), onde o mesmo destaca o uso de matrizes de rotação para se chegar ao conceito das quádricas, logo, já alia um conteúdo de Educação Básica com Ensino Superior.

Dessa forma, o que queremos, quando levantamos esta problemática, é propor mais uma alternativa de exploração do conceito de quádricas, agora por meio de superfícies de revolução, conceito este visto e trabalhado em disciplinas de Geometria Analítica. Como consequência, podemos observar uma conexão entre dois eixos importantes e essenciais na área da Matemática.

Assim, para finalizar, destacamos que ainda há um grande caminho para a descompartmentalização de disciplinas e saberes, tanto nas escolas quanto nas universidades, e que não podemos julgar os professores que ainda trabalham em uma lógica oposta já que

A escola se organiza segundo esta compartmentalização. E o aluno tem que se virar porque tem que transitar por todos os compartimentos com eficiência para ser aprovado. Nós escolhemos a área de nossos cursos superiores, mas jamais admitimos que os alunos dos níveis mais baixos que os universitários tenham escolhas (GERALDI, 2016, p. 120).

O que podemos fazer é ofertar e construir alternativas para que os professores e futuros professores tenham a oportunidade de utilizar em suas práticas materiais e recursos diferenciados, que contemplem a ideia de união de conceitos para a criação de novos significados, contribuindo assim para um possível avanço nos moldes educacionais existentes. Assim, acreditamos que o objetivo da pesquisa realizada

permitiu um conhecimento sobre produções contemplando o tema superfícies quádricas e Geometria Analítica.

## REFERÊNCIAS

Página | 54

ALVES, L. F. G. **Uma abordagem do estudo de cônicas e quádricas com o auxílio do software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – PROFMAT, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 79 p., 2016.

ANTON, H.; BUSBY, R. **Álgebra Linear contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006.

CARDOSO, F. C. NEHRING, C. M. O Ensino de Geometria Analítica na Perspectiva de uma professora formadora. In: **IV EIEMAT – Escola de Inverno de Educação Matemática**. 6º ed. 2014. Universidade Federal de Santa Maria – Santa Maria/RS. Anais da IV Escola de Inverno de Educação Matemática. ISSN: 2316-7785

CORREA, J. M. **Superfícies Quádricas: Transformação das Coordenadas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – PROFMAT, Universidade Estadual Paulista. São Paulo, 89 p., 2010.

FIOTENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FREIRE, P. **Carta de Paulo Freire aos Professores**. São Paulo, SP: Estudos Avançados, 2001.

LEHAM, C. H. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: Globo, 1970.

LIMA, G.L.; GOMES, H. Álgebra Linea: de sua constituição como área de conhecimento matemático à sua inserção no currículo da primeira universidade brasileira. **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática**. (org.) Bárbara Lutaif Bianchini e Silvia Dias Alcântara Machado. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018, pp.10-21.

LONDERO, N. **Explorando recursos do GeoGebraBook no estudo de quádricas a partir de diferentes representações**. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas. Santa Maria, 156 p., 2017.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? In: **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: SBEM, v. 4, 1995.

MOREIRA, M.A. **Metodologias de pesquisa em ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOTA, J. F. **Um estudo de planos, cilindros e quádricas, explorando secções transversais, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot**. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino) - Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 137 p., 2010.

GASPAR, A. S. **As Cônicas, Quádricas e suas Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade de Brasília. Rio de Janeiro, 75 p., 2014.

GERALDI, J. W. Notas sobre a autonomia relativa do professor e seu cerceamento constante. **Revista do NESEF Filosofia e Ensino. Filosofia, arte e militância docente**. Paraná, v.1, p. 116-138, mai. 2016.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica: Repensando a Formação Inicial Docente em Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

SILVA, R. G. **Reconhecimento de quádricas via diagonalização de matrizes**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe. Sergipe, 56 p., 2016.

STEINBRUCH, A. WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

**Submetido em:** 16 de setembro de 2019.

**Aprovado em:** 10 de outubro de 2019.