

**COOPERAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES DE  
MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****COOPERATION IN THE DEVELOPMENT OF MODELING ACTIVITIES IN  
MATHEMATICS EDUCATION**

**Rhômulo Oliveira Menezes<sup>1</sup>**  
**Roberta Modesto Braga<sup>2</sup>**  
**Adilson Oliveira do Espírito Santo<sup>3</sup>**

**RESUMO**

Este artigo é recorte de uma dissertação de mestrado que buscou identificar e analisar implicações surgidas do uso de Tecnologias Digitais no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Neste recorte, objetivamos analisar a cooperação entre sujeitos (alunos e professor) e tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. A pesquisa é do tipo qualitativa, em que foram analisados relatórios e apresentações em *PowerPoint* produzidos por alunos do curso de matemática e gravações em áudio e vídeo registradas pela professora mediadora (segunda autora) no desenvolvimento de três atividades de Modelagem Matemática. Dessa forma, foi possível descrever a cooperação estabelecida entre a professora mediadora, os alunos e as tecnologias digitais, nos permitindo inferir que essa tríade configurou uma rede semântica (mixagens cognitivas complexas e cooperativas) em torno das temáticas investigadas.

**Palavras chave:** Cooperação, Atividades de Modelagem Matemática, Tecnologias Digitais.

**ABSTRACT**

This article is a cut of a master's thesis that sought to identify and analyze implications arising from the use of Digital Technologies in the development of Mathematical Modeling activities. In this section, we aim to analyze the cooperation between subjects (students and teacher) and digital technologies in the development of Mathematical Modeling activities. The research is of the qualitative type, in which powerpoint reports and presentations produced by students of the math course and audio and video recordings recorded by the mediating teacher in the development of three activities of Mathematical Modeling were analyzed. In this way, it was possible to describe the cooperation established between the mediating teacher, the students and the digital technologies, allowing us to infer that this triad set up a semantic network (complex cognitive mixes and cooperatives) around the themes investigated.

**Keywords:** Cooperation, Mathematical Modeling Activities, Digital Technologies.

<sup>1</sup> Discente do curso de Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/IEMCI/UFPA). E-mail: rhominho.oliveira@hotmail.com. Agência Financiadora: CNPq.

<sup>2</sup> Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas pela UFPA, Professora Adjunta na Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Castanhal (CUNCAST/UFPA). E-mail: robertabraga@ufpa.br

<sup>3</sup> Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP, Professor Titular da UFPA, atualmente Coordenador do Campus Salinópolis da UFPA. E-mail: adilson@ufpa.br

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo analisar a cooperação entre sujeitos (alunos e professor) e tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Para alcançar o objetivo nos apoiamos teoricamente em Assmann (2000) acerca do conceito de mixagens cognitivas complexas e cooperativas, e em Bassanezi (2011) acerca da concepção e etapas do processo de Modelagem na perspectiva da Educação Matemática, ambas as concepções discutidas respectivamente na segunda e na terceira seção. Na parte metodológica do trabalho, descrita na quarta seção, caracterizamos o tipo de pesquisa, como se deu a coleta e análise dos dados usados neste trabalho, e os sujeitos que participaram do desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática. Na quinta seção discutimos resultados encontrados a partir da lente teórica discutida, e na sexta seção, traçamos algumas considerações segundo o objetivo elencado neste trabalho.

Página | 148

## 2 MIXAGENS COGNITIVAS COMPLEXAS E COOPERATIVAS

O uso de tecnologias digitais atualmente é inerente ao nosso cotidiano. As notícias, os trabalhos, as apresentações são consultadas/formuladas nos *smartphones* ou *tablets*. Nos relacionamos via aplicativos, seja para falar com familiares ou amigos. Se vamos viajar, compramos as passagens por aplicativos das empresas aéreas ou *sites* de viagens. O *check-in* do voo, antes realizado fisicamente, agora pode ser feito com um *clique* a caminho do aeroporto de dentro do automóvel da *Uber*.

Essas modificações nas atividades e ações humanas a partir do avanço das tecnologias digitais configuraram um novo aspecto da sociedade, que Assmann (2000) definiu como ‘sociedade da informação’, a entendendo como uma

(...) sociedade que está actualmente a constituir-se, na qual são amplamente utilizadas tecnologias de armazenamento e transmissão de dados e informação de baixo custo. Esta generalização da utilização da informação e dos dados é acompanhada por inovações organizacionais, comerciais, sociais e jurídicas que alterarão profundamente o modo de vida tanto no mundo do trabalho como na sociedade em geral. (ASSMANN, 2000, p. 8-9)

Com isso, o uso feito por nós das tecnologias digitais mudou, estas deixam de ser usadas como instrumentos amplificadores dos sentidos humanos (a visão, o movimento, entre outros), e passam a ser usadas como recursos que ampliam o potencial cognitivo do

ser humano (seu cérebro/mente) possibilitando dessa forma “mixagens cognitivas complexas e cooperativas” (ASSMANN, 2000).

Nessa perspectiva, entendemos que as tecnologias digitais deixam de ser apenas amplificadoras de atividades sensoriais humanas e passam a funcionar de forma cooperativa, possibilitando ao ser humano outras formas de realizar atividades cognitivas como: escrever, escutar, compor, tocar, ver, criar imagens, conceber, entre outras. E que as “mixagens cognitivas complexas e cooperativas” acontecem quando indivíduos imbuídos de suas subjetividades e auxiliados pelas tecnologias digitais se interligam na construção mútua de conhecimento, ensejando novas configurações e experiências na aprendizagem de algo.

### **3 MODELAGEM NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

A Modelagem Matemática tem sua origem em áreas de inquérito que usavam/usam a Matemática para/na solução de problemas reais. Sendo usada por matemáticos aplicados como método de pesquisa nas mais variadas áreas (Física, Química, Biologia). Posteriormente, passou a ser usada por pesquisadores da área da Educação Matemática (D'AMBROSIO, 1996; BASSANEZI, 2011) como método/estratégia de ensino.

Segundo Araújo (2007) no contexto da Educação Matemática existe uma multiplicidade de perspectivas de Modelagem Matemática. Por exemplo, Bassanezi (2011) entende a Modelagem Matemática como a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Para Biembengut e Hein (2014) a Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Já para Meyer et al. (2013) a Modelagem Matemática é entendida a partir da concepção de educar matematicamente, na qual a Matemática é tomada segundo regras e convenções que são estabelecidas dentro de determinado contexto social, histórico e cultural, permeado por relações de poder.

Dentre essas perspectivas destacamos a de Bassanezi (2011) que enxerga nas aplicações da Matemática um caminho para aproximá-la do aluno, uma vez que a forma fracionada e estanque como vêm sendo ensinada em sala de aula acaba por afastá-lo da disciplina. Nesse sentido, para a investigação de determinada situação ou problema real

por meio da Modelagem Matemática, o autor descreve cinco etapas: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

A Modelagem Matemática começa com a escolha da temática ou problema a ser investigado. Nesse momento inicial Bassanezi (2011) recomenda que as situações escolhidas sejam abrangentes, dando margem ao surgimento de problemas em várias direções. Essa escolha deve ter a participação do aluno, pois ele precisa querer investigar o tema em questão.

A experimentação configura-se como o momento da coleta de dados qualitativos ou numéricos. Com a escolha do tema precisa-se encontrar informações sobre o tema, sendo essa busca realizada de diferentes formas: entrevistas, pesquisas em livros ou revistas, realização de experimentos. O que vai definir o método da coleta de dados será a temática a ser investigada.

Na Abstração ocorre a seleção das variáveis do tema investigado, a formulação do problema ou dos problemas e suas respectivas hipóteses, a delimitação dos conteúdos matemáticos que ajudarão na elaboração do modelo matemático e na sua consequente solução.

Na terceira etapa, Resolução, ocorre a elaboração do modelo matemático com a intenção de responder os problemas levantados. Sobre o modelo, Bassanezi (2011) o descreve como “a representação de um objeto ou fato concreto (...) tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema compartimental, um mapa etc.), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica” (BASSANEZI, 2011, p.20).

Na Validação, com as respostas geradas pelo modelo, é possível avaliar se o modelo é adequado ou não para a situação-problema investigada. Se o modelo atende ao problema ou aos problemas levantados, o processo de Modelagem Matemática se encerra, caso o modelo não atenda, será necessário modificar o modelo voltando as etapas anteriores e tentando encontrar inconsistências que levaram aos erros identificados nas respostas desse modelo, caracterizando assim a etapa de Modificação.

#### 4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Segundo Malheiros (2004) pesquisas em Educação Matemática tradicionalmente são conduzidas por abordagens qualitativas. Sobre o termo ‘pesquisa qualitativa’ Strauss e Corbin (2008) definem como sendo “qualquer tipo de pesquisa que se produza

resultados não alcançados através de procedimentos estatísticos ou de outros meios de qualificação. Pode se referir à pesquisa sobre a vida das pessoas, experiências vividas, comportamentos, emoções e sentimentos” (p. 23).

Considerando, pois, o que foi exposto por Strauss e Corbin (2008), entendemos este trabalho por suas nuances de investigação e análise como sendo uma pesquisa do tipo qualitativa, uma vez que o material produzido pelos alunos (relatórios e apresentações em *PowerPoint*) e pela professora mediadora (gravações em áudio e vídeo) permitiu descrever, investigar e analisar vivências ocorridas no desenvolvimento de atividades no Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM), localizado no Campus Universitário de Castanhal da Universidade Federal do Pará (CUNCAST/UFPA).

No contexto do LEMM a professora mediadora disponibilizou uma lista de temas que poderiam ser investigados e os alunos escolheram os seguintes: Resistência Física Homem x Mulher; Solução de Água e Sal; e Ponte do Rio Moju/PA. Essas atividades foram desenvolvidas por grupos de alunos, graduandos do curso de Licenciatura em Matemática de diferentes períodos, no primeiro semestre de 2014.

A análise dos dados aconteceu obedecendo alguns momentos. Após organização e seleção dos materiais dos alunos e dos registros da professora mediadora focamos em situações que pudessem contribuir para nossa investigação (MALHEIROS, 2004, p. 62). As transcrições das gravações de áudio e vídeo resultaram de muitas horas de material, por isso começamos a identificar e selecionar nos registros disponíveis situações relacionadas ao objetivo elencado (PINHEIRO, KAKEHASHI E ANGELO, 2005, p.720).

Dessa maneira, fazendo uso da triangulação que tem “por objetivo abranger a máxima de amplitude na descrição, explicitação e compreensão do objeto de estudo” (GOLDENBERG, 1997, p. 63), mais especificamente da triangulação de dados. Em razão de diferentes dados oriundos de relatórios, apresentações em *PowerPoint*, gravações em áudio e vídeo (FIGARO, 2014, P. 128); pudemos descrever e analisar as atividades de Modelagem Matemática focando na cooperação entre os alunos, a professora mediadora e as tecnologias digitais.

#### **4.1 Atividade “Resistência Física Homem X Mulher”**

Essa atividade foi desenvolvida por duas alunas, que assumiram a tarefa de verificar a relação entre a resistência física do homem e da mulher. O início da

investigação começou com pesquisas na *internet*, em que foi possível encontrar os cálculos referentes a Frequência Cardíaca (FC) e ao Índice de Massa Corpórea (IMC). Os voluntários para essa investigação foram os outros alunos dos outros grupos do LEMM e a professora mediadora.

Para essa coleta, além da medição do peso e da altura, as alunas, no intuito de comparar o condicionamento físico do homem e da mulher, submeteram os participantes voluntários a uma caminhada em um percurso de nove metros e meio, de ida e nove metros e meio de volta. Em seguida era registrado o tempo de realização desse percurso e a Frequência Cardíaca (FC) de cada participante. A partir dessa coleta de dados, as alunas montaram a Tabela 01, a seguir.

<b>VOLUNTÁRIO</b>	<b>PESO</b>	<b>ALTURA</b>	<b>F. C.</b>	<b>IMC</b>	<b>TEMPO</b>
<b>Participante 01</b>	58	1,61	36	22,3	0: 07: 35
<b>Participante 02</b>	47,5	1,61	52	18,3	0: 07: 28
<b>Participante 03</b>	42,5	1,49	48	19,1	0: 07: 53
<b>Participante 04</b>	49	1,56	44	20,1	0: 07: 50
<b>Participante 05</b>	50	1,61	72	19,2	0: 06: 90
<b>Participante 06</b>	70	1,58	36	28	0: 05: 97
<b>Participante 07</b>	57,5	1,55	68	23,9	0: 06: 72
<b>Participante 08</b>	56	1,59	36	22,1	0: 07: 41
<b>Participante 09</b>	79	1,54	68	27,3	0: 05: 47
<b>Participante 10</b>	59	1,54	36	24,8	0: 05: 25
<b>Participante 11</b>	71,5	1,6	60	27,9	0: 05: 78
<b>Participante 12</b>	61,5	1,7	48	21,2	0: 05: 78

Tabela 01 – Dados coletados pelas alunas

Fonte: Registros das Alunas, 2014

Para a apresentação e análise dos dados as alunas recorreram a ferramentas da planilha eletrônica *Excel*, com a qual puderam verificar a existência de correlação entre as variáveis Peso e Altura, e as variáveis FC e IMC. Dessa forma, as alunas analisaram primeiro as variáveis Peso e Altura, inserindo os dados na planilha, gerando assim, o seguinte Gráfico de Dispersão.



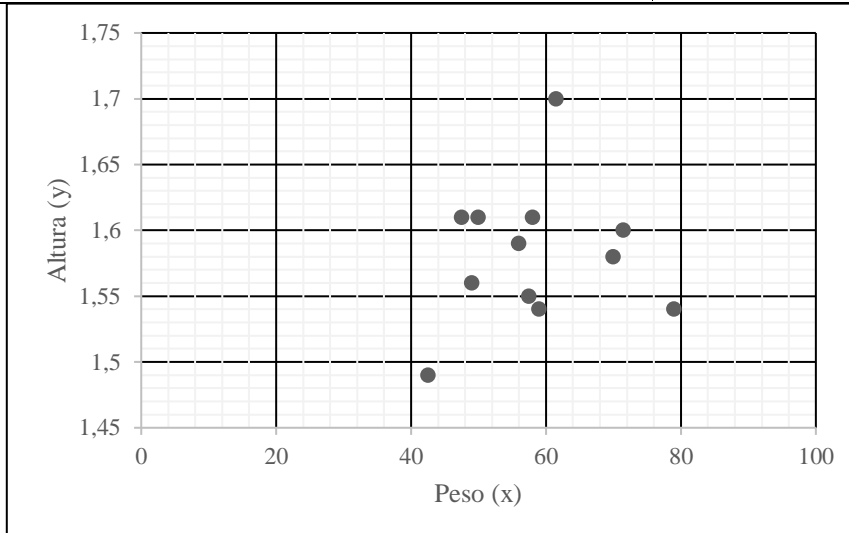


Gráfico 01 – Gráfico de Dispersão do Peso (x) versus Altura (y)  
Fonte: Registros das Alunas, 2014

Sobre o Gráfico 01, as alunas apontaram, pela visualização da disposição dos pontos, uma forma irregular quando comparada, por exemplo, a uma formação linear ou de uma curva, o classificando como nuvem (Nomenclatura própria da investigação de diagramas de dispersão segundo MARTINS E PONTE, 2011). Em seguida, as alunas utilizaram o Coeficiente de Correlação de Pearson, sobre o qual o descreveram como sendo:

uma medida do grau de relação linear entre duas variáveis quantitativas. Este coeficiente varia entre os valores -1 e 1. O valor 0 (zero) significa que não há relação linear, o valor 1 indica uma relação linear perfeita e o valor -1 também indica uma relação linear perfeita, mas inversa, ou seja, quando uma das variáveis aumenta a outra diminui. Quanto mais próximo estiver de 1 ou -1, mais forte é a associação linear entre as duas variáveis (Registros das alunas, 2014).

E o apresentaram por:

$$r = \frac{n \sum(x \cdot y) - (\sum x) \cdot (\sum y)}{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}} \quad (1)$$

Como o cálculo do Coeficiente de Correlação de Pearson requeria várias operações de resolução, as alunas compartimentalizaram essas operações, com a finalidade de resolvê-las separadamente, para depois reagrupá-las. Essas resoluções foram realizadas com o auxílio da Planilha Eletrônica Excel e apresentadas na Tabela 02.

x	y	x*y	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	( $\sum x$ ) <sup>2</sup>	( $\sum y$ ) <sup>2</sup>
58	1,61	93,38	3364	2,5921	519091, 43	360,2404
47,5	1,61	76,475	2256,25	2,5921		
42,5	1,49	63,325	1806,25	2,2201		
49	1,56	76,44	2401	2,4336		
50	1,61	80,5	2500	2,5921		
70	1,58	110,6	4900	2,4964		
57,5	1,55	89,125	3306,25	2,4025		
56	1,59	89,04	3136	2,5281		
79	1,54	121,66	6241	2,3716		
59	1,54	90,86	3481	2,3716		
71,5	1,6	114,4	5112,25	2,56		
61,5	1,7	104,55	3782,25	2,89		
$\sum x =$ 720,48	$\sum y =$ 18,98	$\sum(x*y) =$ 1110,355	$\sum x^2 =$ 42286,25	$\sum y^2 =$ 30,0502		

Tabela 02 – Resoluções das operações separadamente das variáveis Peso (x) e Altura (y)  
Fonte: Registros das Alunas, 2014

De posse das resoluções dos termos sinalizadas em cinza na Tabela 02, as alunas puderam reagrupar os resultados, substituindo-os no modelo (1). Incurrendo assim, na resolução do coeficiente, em um radical com radicando negativo, o que tornou inviável encontrar um resultado pertencente ao conjunto dos números reais. Tal situação, fez com que as alunas concluíssem que, em se tratando das variáveis Peso e Altura, não existia correlação quando analisados a partir do gráfico de dispersão e do cálculo do Coeficiente de Correlação de Pearson. Com essa conclusão, as alunas se voltaram para as variáveis FC e IMC, repetindo o mesmo processo de tratamento dos dados, primeiro observando via recurso gráfico na Planilha Eletrônica Excel, como exposto no Gráfico 02.

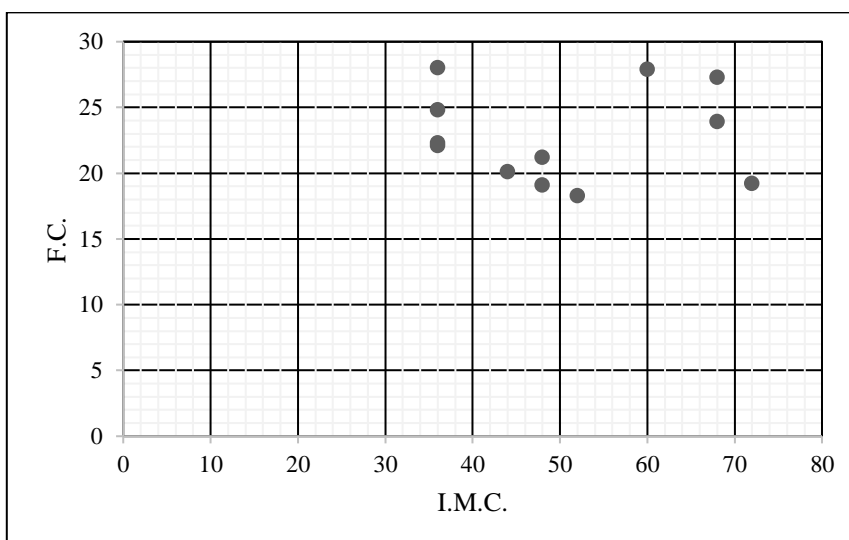


Gráfico 02 – Gráfico de Dispersão da F.C. (w) versus I. M. C. (z)  
Fonte: Registros das Alunas, 2014



Como demonstrado no Gráfico 02, as alunas constataram que os dados dessas variáveis também se encontravam dispersos, sem um contorno que sugerisse uma forma linear. Assim, novamente as alunas começaram a tratar os dados segundo o Coeficiente de Correlação de Pearson, resultando na Tabela 03.

w	z	w*z	w <sup>2</sup>	z <sup>2</sup>	(∑ w) <sup>2</sup>	(∑ z) <sup>2</sup>
36	22,3	802,8	1296	497,29	364816	75185,64
52	18,3	951,6	2704	334,89		
48	19,1	916,8	2304	364,81		
44	20,1	884,4	1936	404,01		
72	19,2	1382,4	5184	368,64		
36	28	1008	1296	784		
68	23,9	1625,2	4624	571,21		
36	22,1	795,6	1296	488,41		
68	27,3	1856,4	4624	745,29		
36	24,8	892,8	1296	615,04		
60	27,9	1674	3600	778,41		
48	21,2	1017,6	2304	449,44		
∑ w = 604	∑ z = 274,2	∑ (w*z) = 13807,6	∑ w <sup>2</sup> = 32464	∑ z <sup>2</sup> = 6401,44		

Tabela 03 – Resoluções das operações separadamente das variáveis F. C. (w) e I. M. C. (z)  
Fonte: Registros das Alunas, 2014

Inserindo as resoluções dos termos, em destaque cinza da Tabela 03, no modelo (1), as alunas pelo Coeficiente de Correlação de Pearson obtiveram  $r = 0,011707269$ . Esse resultado as fizeram considerar que, pelo distanciamento das extremidades 1 e -1 e da proximidade com 0, o resultado de r apontava uma fraca correlação entre as variáveis FC e IMC.

De modo geral, as alunas concluíram embasadas nas investigações das variáveis Peso e Altura, FC e IMC, mediadas pela análise dos gráficos e das respostas obtidas com o Coeficiente de Correlação de Pearson, que não foi possível encontrar correlações entre essas variáveis para esse grupo de participantes investigados. Não podendo assim, alcançar o objetivo determinado inicialmente, que era de relacionar a resistência física do homem e da mulher, apontando qual gênero era mais resistente fisicamente.

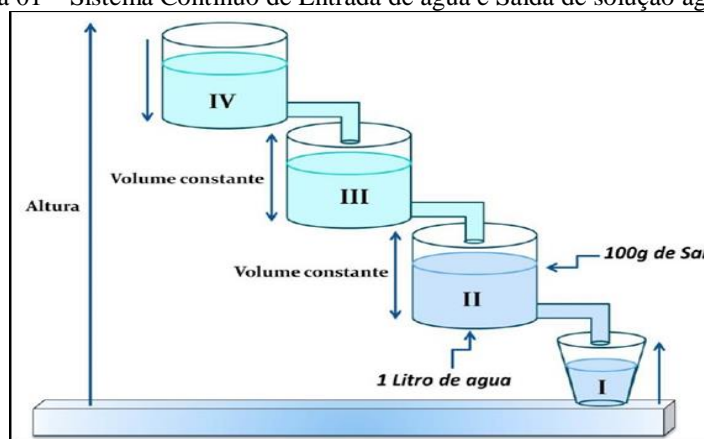
#### 4.2 Atividade “Solução de Água e Sal”

A atividade foi desenvolvida por um grupo de quatro alunos. A princípio o grupo tinha o objetivo de tornar uma quantidade de água salgada, própria para o consumo, ou seja, torná-la dessalinizada. No entanto, esse processo de dessalinização da água foi ficando para trás, mediante discussões dos alunos que surgiram em meio a pesquisas na internet, sobre o tempo que esse processo levaria e sobre as ferramentas e estratégias

necessárias para comprovar que a água, a princípio salgada, estaria ao final do processo própria para o consumo.

A partir disso, os alunos optaram por investigar a variação de concentração de sal em um fluxo contínuo de entrada e saída de água de um recipiente. Esse novo objetivo exigiu uma coleta de dados, para a qual os alunos tiveram que improvisar com os recursos disponíveis no LEMM, um sistema, em que a água entraria por um orifício em um recipiente e sairia simultaneamente por outro orifício desse mesmo recipiente. Os alunos representaram esse sistema na Figura 01.

Figura 01 – Sistema Contínuo de Entrada de água e Saída de solução água e sal



Fonte: Registros dos Alunos, 2014

Os alunos montaram esse sistema tentando manter o volume dos recipientes constante. Para isso, eles explicaram:

nosso desafio era manter o volume do recipiente II constante, mas para isso notamos que o volume do recipiente III que abastece o recipiente II também teria que ser constante, então incluímos o recipiente IV para abastecer o recipiente III, e assim manter o volume e a vazão do recipiente II constante”. (Registros dos Alunos, 2014)

Como se percebe na Figura 01, existiu um recipiente onde estava a solução, com 100 g de sal diluído em 1 litro de água (recipiente II), por onde entrava uma quantidade de água sem sal, e saía simultaneamente por outro orifício água com sal. Por esse último, os alunos coletaram seis amostras de água com sal, em que puderam aferir a quantidade de água com sal existente nos copos e o tempo que levou para encher cada copo. Essas medições encontram-se na Tabela 04.

**Quadro 01 – Tempo e Volume dos copos de água e sal coletados**

Ordem	Tempo para encher um copo em (segundos)	Quantidade de água em cada copo em (ml)
1º	20,77	136
2º	19,30	132
3º	21,44	135
4º	19,79	136
5º	21,82	140
6º	20,94	136
<b>Soma</b>	<b>124,06</b>	<b>815</b>
<b>Media</b>	<b>20,68</b>	<b>135,83</b>

Tabela 04 – Tempo e Volume dos copos de água e sal coletados  
Fonte: Registros dos Alunos, 2014

Como exposto na Tabela 04, os alunos determinaram a média dos tempos correspondente para o enchimento de cada copo e a média do volume de água com sal contida nesses copos, para poderem calcular a vazão de saída. Essa vazão, por sua vez, foi determinada pelo quociente da média do volume pela média do tempo, incidindo assim, em uma vazão de 6,5 ml/s. Como os volumes dos recipientes eram constantes, os alunos concluíram que a vazão de entrada era igual a vazão de saída. Esses apontamentos levaram os alunos a construírem o modelo 2.

$$\frac{ds}{dt} = V. \text{Entrada} * C. \text{Entrada} - V. \text{Saída} * C. \text{Saída} \quad (2)$$

Em que: V. Entrada = vazão da entrada de água; C. Entrada = concentração de sal da entrada de água; V. Saída = vazão da saída da solução de água e sal; C. Saída = concentração de sal da saída da solução de água e sal. Ao substituírem os valores correspondentes das vazões e das concentrações, os alunos abordaram a equação via regras de derivação, e pelo Método do Fator Integrante, direcionando-os ao modelo 3.

$$S = \frac{100}{e^{0,0065t}} \quad (3)$$

Com esse modelo os alunos puderam gerar dados referentes à quantidade de sal que ficava no recipiente, e a quantidade de sal que saía em um fluxo contínuo de tempo. Esses dados foram organizados na Tabela 05.

TEMPO (s)	QTDE. DE SAL NA MISTURA (g)	QTDE. DE SAL QUE SAIU (g)
0	100	0,00
21	87,24063203	12,76
42	76,10927876	23,89
63	66,39821582	33,60
84	57,92622314	42,07
105	50,53520317	49,46
126	44,08723064	55,91
*	*	*
*	*	*
*	*	*
1512	0,005392049	99,99
1533	0,004704058	100,00

**Tempo que o sal total sairia da solução em minutos = 25,55**

Tabela 05 – Dados gerados pelo modelo encontrado  
Fonte: Registros dos Alunos, 2014

Os alunos utilizaram os dados da Tabela 05 para gerar dois gráficos na Planilha Eletrônica Excel. Um referente à quantidade de sal que permanecia na solução do recipiente II e outro sobre a quantidade de sal que saía do recipiente II. No Gráfico 03 é perceptível que a quantidade sal no recipiente II começa em 100 g e com o passar tempo e com a vazão de solução pelo orifício essa quantidade vai diminuindo até se tornar constante.

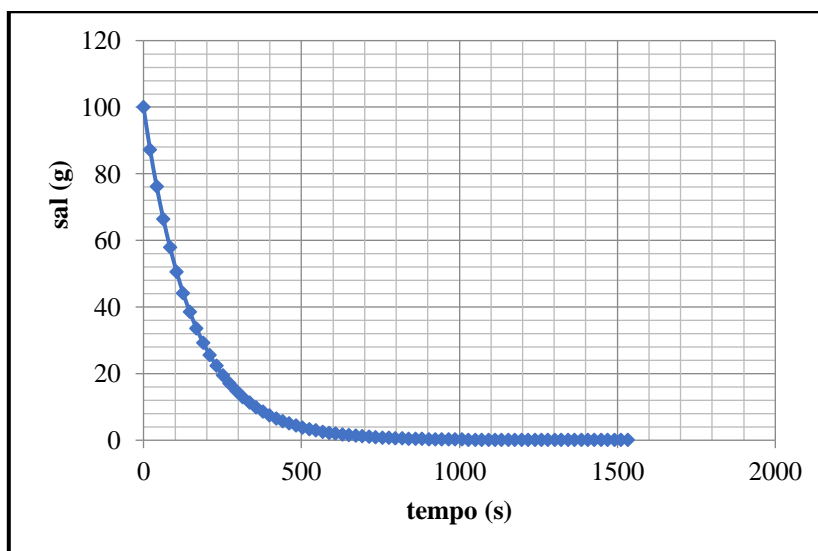


Gráfico 03 – Quantidade de sal que permanecia na mistura do recipiente II  
Fonte: Registros dos Alunos, 2014

Já no Gráfico 04 acontece o inverso, a quantidade de sal na solução que sai pelo orifício começa próximo da origem e com o passar tempo essa quantidade vai aumentando se tornando constante quando se aproxima da medida de 100 g.

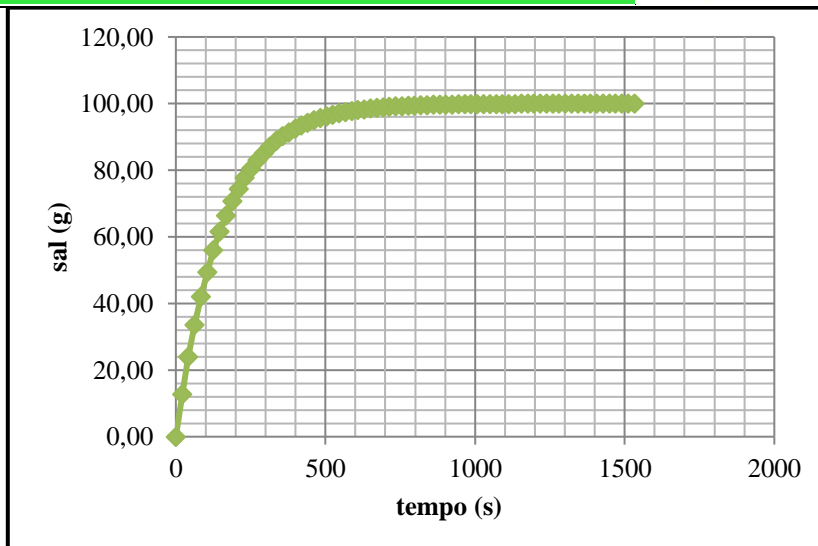


Gráfico 04 – Quantidade sal que saía pelo orifício do recipiente II  
Fonte: Registros dos Alunos, 2014

Os Gráficos 03 e 04 mostram visualmente como se comportou o fenômeno da variação de sal no sistema de entradas e saídas criado pelos alunos. Assim, com o modelo matemático (3) e com as previsões feitas a partir dele, os alunos tiveram que comprovar se o modelo encontrado era adequado ao experimento desenvolvido. A forma que os alunos encontraram para fazer isso foi por meio da destilação. Assim, eles pegaram a primeira amostra de solução, 136 ml de água e sal coletado em 20,77 segundos, e destilaram, restando no recipiente 19,3 gramas de sal. Esse processo foi esquematizado pelos alunos na Figura 02.

Figura 02 – Processo de Destilação da primeira amostra de mistura coletada



Fonte: Registros dos Alunos, 2014

O valor encontrado na destilação foi diferente do valor encontrado pelo modelo (3), ilustrado na Tabela 05. Na previsão feita com o modelo, em 21 segundos saíram 12,76

gramas de sal. Desta forma, a diferença entre a quantidade real e a quantidade gerada pelo modelo é de 6,6 g de sal. Os alunos atribuíram essa diferença a falhas intrínsecas à realização do experimento, como: problemas na pesagem do sal, sobras de água na mistura destilada, entre outros. Essa diferença encontrada foi caracterizada pelos alunos como a margem de erro do modelo (3), sendo representada no Gráfico 05.

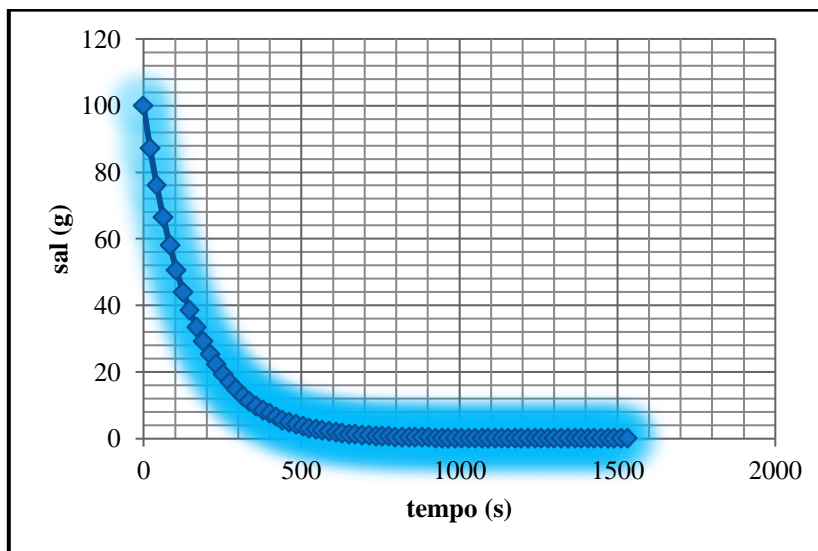


Gráfico 05 – Margem de erro do modelo (3)

Fonte: Registros dos Alunos, 2014

### 4.3 Atividade “Ponte do Rio Moju/PA”

Essa atividade foi desenvolvida por um grupo de três alunas. O interesse delas por essa temática se deu por alguns fatores. Primeiro, por ter sido um acontecimento recente a queda da ponte e segundo, por ser próximo de suas vivências considerando que está localizada na mesma região em que as alunas moram. Nesse contexto, elas acreditavam que o fenômeno responsável pela queda de parte da Ponte do Rio Moju poderia ser explicado por alguma relação matemática. Essa curiosidade foi explicitada na apresentação do desenvolvimento da atividade, em que elas falaram:

O motivo pelo qual escolhemos o tema se deu pelo fato de ter sido um acontecimento recente, por isso despertou uma certa curiosidade em saber que tipo de fenômeno houve no momento da queda da ponte e saber quais os prejuízos sociais. (Registros dos alunos, 2014)

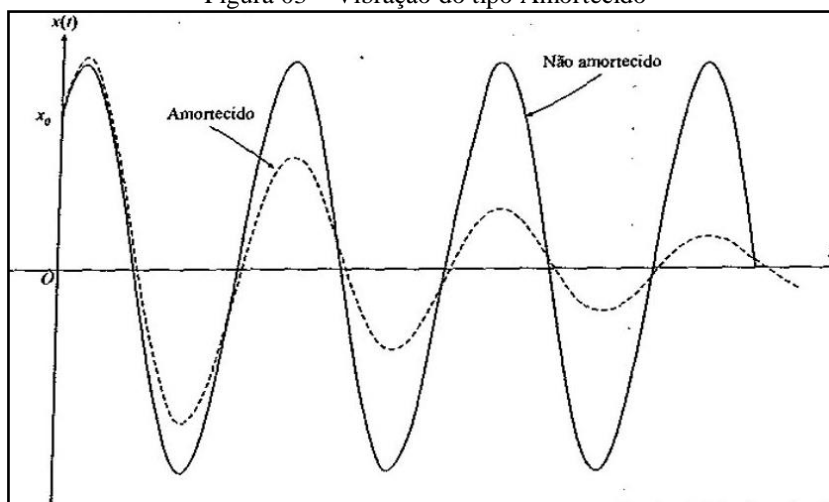
As alunas começaram pesquisas na internet sobre o porquê de a ponte ter caído. Porém, não foi possível encontrar muitas informações sobre esse episódio com a ponte

do Rio Moju. As alunas reforçaram em sua apresentação, que a viabilização da investigação dessa atividade se deu basicamente por meio de pesquisas na internet.

Essas pesquisas e as discussões ocorridas a partir delas, fez com que as alunas entendessem o fenômeno que causou a queda da ponte do Rio Moju por meio da associação de diferentes conceitos físicos. Sobre a colisão de uma balsa com uma das pilastras de sustentação da ponte, as alunas entenderam que a colisão gerou uma vibração. Essa vibração foi entendida como “qualquer movimento que se repete regular ou irregularmente” (Registros dos alunos, 2014).

As alunas encontraram nas pesquisas três tipos de vibração, a saber: forçada, amortecida e não-amortecida. Sobre a vibração ocorrida da colisão da balsa com a pilastra da ponte, as alunas classificaram como sendo amortecida, que segundo elas, é aquela energia vibratória que vai se dissipando no transcorrer do tempo. As alunas exemplificaram o comportamento desse tipo de vibração a partir da Figura 03.

Figura 03 – Vibração do tipo Amortecido



Fonte: Registros das Alunas, 2014

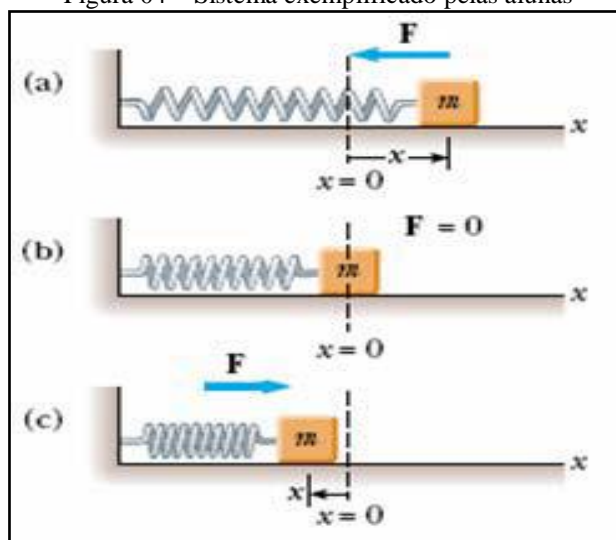
Percebendo que a vibração se propaga na forma de ondas, as alunas sentiram a necessidade de se apropriar do conceito de onda, definindo-a como qualquer perturbação (pulso) que se propaga em um meio. A partir dessa definição, as alunas reuniram um conjunto de conceitos físicos relacionados a ondas: oscilações, frequência, período, comprimento de onda, amplitude e ressonância. A apropriação desses conceitos físicos ajudou a explicar o fenômeno que causou a queda da ponte após a colisão da balsa. A partir desse domínio, as alunas pontuaram uma série de acontecimentos em cadeia, ou seja:



A balsa se chocou com a ponte gerando choque, esse choque gerou uma vibração, a vibração gerou frequência, e a frequência tem ondas, que geraram esse processo. Então, a gente concluiu que ocorreu uma oscilação! (Registros dos alunos, 2014)

A conclusão das alunas de que ocorreu uma oscilação direcionou suas pesquisas para o conceito de Movimento Oscilador Amortecido, a partir do conceito de Movimento Harmônico Simples (MHS), sendo determinado pela sua causa, ou seja, pela força que provoca o MHS. Para exemplificar esse movimento as alunas discutiram acerca do seguinte fenômeno: “um sistema concreto, no qual um objeto com massa  $m$ , está ligado a uma mola leve, cuja massa pode ser desprezada. Supondo ainda que a superfície em que o objeto se move não apresenta nenhum atrito” (Registros dos alunos, 2014). Para a compreensão desse sistema, as alunas apresentaram a Figura 04.

Figura 04 – Sistema exemplificado pelas alunas



Fonte: Registros das Alunas, 2014

A força  $F$  na Figura 04 é proporcional ao deslocamento do objeto da massa  $m$ , e é conhecida como Força Restauradora, pois tem a tendência de devolver o corpo à sua posição de equilíbrio. A Força Restauradora, pela primeira Lei de Newton, é descrita matematicamente por:

$$F = -kx \quad (4)$$

A Força Restauradora é a força elástica da mola que obedece a Lei de Hooke, pois segundo essa lei, “qualquer que seja o sistema observado, o objeto que se move sob influência de uma única Força Restauradora vai executar o MHS” (Registros da apresentação das alunas oriundas de consultas e pesquisas na internet, 2014). Desta forma,

com a descoberta da força que provoca o MHS, as alunas aplicaram a segunda Lei de Newton, que resultou no modelo 5.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (5)$$

O modelo 5 representa o MHS sem considerar o atrito, pois como se viu na Figura 04 a superfície em questão era lisa, entretanto, houve atrito quando a balsa colidiu na pilastra da ponte, o que fez com que as alunas acrescentassem ao modelo 6 mais uma força, no caso, a Força de Atrito.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

O modelo 6 descreve o Movimento Oscilador Amortecido. Porém, do jeito como está, o Movimento Oscilador Amortecido está livre, estabilizando seu movimento somente após algum tempo. Essa característica levantou algumas reflexões nas alunas:

Então a gente pensou, se ele é um oscilador amortecido, deixado livre ele vai parar de oscilar depois de algum tempo. Então, será que por conta desse algo a mais, ele não parasse? Se isso fosse de forma constante e fizesse com que a ponte caísse? Então a gente pensou o seguinte, sendo assim assumiremos a existência de uma força externa periódica. (Registros dos alunos, 2014)

No fenômeno investigado, a força externa é representada pela colisão da balsa com uma das pilastras. Assim, esse evento trouxe mudanças para o modelo, pois as alunas acrescentaram a força externa periódica, conforme percebido no modelo 7.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega t) \quad (7)$$

A construção do modelo 7 exigiu a pesquisa de diversos conceitos físicos. A apropriação desses conceitos ajudou as alunas a entenderem que foram vários fatores que levaram a ponte a cair. Assim, as alunas concluíram que a força externa periódica entrou em ressonância com o movimento oscilador amortecido. Fato que aumentou a amplitude de ambas as oscilações, ou seja, frequências iguais, tanto da ponte quanto da balsa e no momento da colisão fez com que houvesse uma ressonância que acarretou na queda da ponte. Ao final da apresentação as alunas hipoteticamente afirmaram que por se tratar de

uma investigação feita quase que exclusivamente por meio de pesquisas na *internet*, não foi possível validar o modelo 7, já que não havia dados a serem experimentados.

## 5 DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

No desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática houve o trabalho cooperativo de alunos, da professora e das tecnologias digitais para a investigação das temáticas escolhidas.

Na atividade “Solução de Água e Sal” os alunos queriam transformar água salgada em água dessalinizada. Porém, as pesquisas realizadas na internet fizeram o grupo refletir sobre a forma que poderiam efetivar essa dessalinização e sobre os recursos e o tempo necessários para essa dessalinização. A partir dessas reflexões, os alunos reconheceram a impossibilidade de efetivar naquele momento a dessalinização da água, voltando-se assim, para a investigação da variação de concentração de sal em um fluxo contínuo de entrada de água e saída de solução de água e sal de um recipiente.

Em seguida, com a definição de um objetivo viável de investigação, os alunos, subsidiados pelas pesquisas realizadas acerca da temática, partiram para a construção de um sistema que possibilitou a coleta de dados. Essa forma de coleta de dados é descrita por Bassanezi (2011), como sendo feita por meio de experiências programadas, possibilitando posteriormente organizar os dados coletados em tabelas. Fato que acaba por favorecer a análise, pois viabiliza a construção de gráficos de curvas de tendências.

Nesse contexto, os alunos construíram um sistema contínuo, formado por recipientes acoplados que apresentavam vazões de entrada e saída de água e solução com vazões semelhantes. Com isso puderam coletar amostras e organizá-las em uma tabela. As amostras coletadas possibilitaram aos alunos construírem um modelo que representasse a variação de sal na água. Sobre a formulação do modelo, Bassanezi (2011) afirma que a natureza dos dados obtidos é que orienta o pesquisador na formulação matemática do modelo, apresentando, deste modo, dois tipos de formulações matemáticas:

Formulação estática: são formulações matemáticas envolvendo equações ou funções com uma ou mais variáveis onde os modelos matemáticos traduzem uma correspondência biunívoca entre as variáveis da formulação e as variáveis físicas do sistema caracterizado. As formulações estáticas utilizam, geralmente, conceitos ligados à área de geometria onde a variável tempo não tem interesse; Formulação

dinâmica: a formulação de modelos dinâmicos, em geral, envolve dois tipos de variáveis (dependentes e independentes) onde a variável independente é geralmente o tempo. (BASSANEZI, 2011, p. 46, 51-52)

Após a coleta e organização dos dados, os alunos delimitaram as variáveis a serem investigadas, no caso a variável tempo e a variável concentração de sal, e utilizaram regras de derivação e o Método do Fator Integrante para encontrar um modelo matemático. Partindo disso e dos apontamentos de Bassanezi (2011) sobre a formulação de modelos matemáticos, entendemos que a formulação do modelo da atividade “Solução de água e sal” foi dinâmica. Isto, porque os alunos trabalharam com dados que remetiam a duas variáveis, que ao serem tratadas matematicamente, possibilitaram o encontro de um modelo no qual a variável concentração de sal era o termo dependente e a variável tempo era o termo independente.

Encontrar esse modelo permitiu que os alunos construíssem uma tabela com a planilha eletrônica *Excel*, a partir dos valores correspondentes ao tempo, à quantidade de sal restante no recipiente da solução e à quantidade de sal que saía do recipiente da solução. De posse das previsões surgidas a partir do modelo, os alunos realizaram a sua validação ao submeterem a primeira amostra coletada no sistema ao processo de destilação. O resultado encontrado pela destilação foi diferente do resultado encontrado pelo modelo, o que fez com que os alunos inferissem que essa diferença correspondia a uma margem de erro.

Na atividade “Resistência Física Homem x Mulher”, as alunas no momento da coleta dos dados e, posteriormente com as interações na planilha eletrônica *Excel*, traçaram a hipótese de que as variáveis elencadas não apresentavam relação de dependência entre si. No entanto, mesmo assim as alunas partiram para uma comprovação algébrica dessa afirmativa, fazendo uso do cálculo do Coeficiente de Correlação de Pearson. Em relação ao processo de Modelagem Matemática as alunas não desenvolveram todas as etapas. Houve assim, a escolha do tema, “Resistência Física Homem x Mulher”, e a escolha, a partir de pesquisas na internet, dos cálculos do IMC e da FC. Essas escolhas subsidiaram a determinação das variáveis e da coleta de dados.

A coleta de dados segundo Bassanezi (2011) pode ser efetuada de várias formas, dentre elas, a feita por meio de entrevistas e de pesquisas executadas com os métodos de amostragem aleatória. Para esse caso, que apresenta aproximações com a forma de coleta de dados realizada pelas alunas nessa atividade, inferimos, baseados em Bassanezi

(2011), como sendo de fundamental importância a organização de um questionário eficiente e a utilização de alguns conceitos básicos de Estatística. As alunas não utilizaram questionários, entretanto, recorreram a uma amostragem de participantes de diferentes gêneros, que tornou possível a coleta e o posterior estudo estatístico dos dados via planilha eletrônica *Excel*.

Com essa coleta e a realização dos cálculos do IMC e da FC, as alunas perceberam que as variáveis elencadas não apresentavam relação de dependência. Sobre isso, a professora mediadora no momento da apresentação das alunas justifica que:

O que as meninas fizeram, elas não tinham como determinar uma relação de uma variável dependendo da outra. Geralmente quando a gente analisa uma variável dependendo da outra, a gente cai no conceito de função. (Registros da professora mediadora, 2014)

Nessa fala, a professora mediadora ressalta que as alunas poderiam descrever o comportamento de uma das variáveis em função de outra variável. O que levou as alunas a buscar correlações entre as variáveis. E para tal optaram pelo uso da planilha eletrônica *Excel* e o Coeficiente de Correlação de Pearson, como recursos para o tratamento das variáveis elencadas. Essa opção das alunas também é discutida pela professora mediadora na socialização relações de dependência ou não de duas variáveis. Nesse sentido, a professora mediadora argumenta que:

em geral, quando a gente tem na realidade variáveis que não estabelecem condições de dependência, a gente busca ajuda da Estatística (...) existem ferramentas matemáticas dentro da estatística que vão buscar alguma relação entre variáveis. (Registros da professora mediadora, 2014).

Desta forma, o Gráfico de Dispersão, serviu, segundo as ações das alunas e segundo as considerações da professora mediadora, como meio para refletir e poder traçar caminhos para as análises dos dados coletados. Bassanezi (2011, p.43) corrobora com a ação das alunas, afirmando que, “a disposição dos dados em um sistema cartesiano e um bom ajuste dos seus valores facilitará a visualização do fenômeno em estudo, propiciando tentativas de propostas de problemas, conjecturas ou leis de formação”.

Considerando o ajuste citado por Bassanezi (2011), as alunas após a visualização dos dados, partiram para um Ajuste Linear, com o cálculo do Coeficiente de Correlação de Pearson. A escolha desse tipo de ajuste para os dados em questão mostra-se inadequada, pois ao visualizar esses dados no Gráfico de Dispersão, as alunas tinham condições de inferir que não haveria correlação entre as variáveis, no entanto, não fizeram

de imediato buscando entender as variáveis investigadas a partir do cálculo Coeficiente de Correlação de Pearson.

Neste contexto, essas ações que envolveram o tratamento dos dados coletados a partir dos Gráficos de Dispersão e do Ajuste Linear caracterizam momentos próximos aos descritos na etapa de Abstração. Como já mencionado, as alunas interromperam a investigação dessa atividade, por não enxergarem nas variáveis trabalhadas condições viáveis que pudessem determinar o alcance do objetivo estabelecido inicialmente, que era de relacionar a resistência física do homem e da mulher e, conseqüentemente apontar quem tinha maior ou menor resistência.

O desenvolvimento da atividade “Ponte do Rio Moju/PA” se diferencia das outras duas descritas anteriormente. A coleta de dados ocorreu em pesquisas na *internet*. Inferimos que esse tipo de coleta de dados se aproxima do que Bassanezi (2011) classificou de pesquisa bibliográfica, utilizando dados já obtidos e catalogados em livros e revistas especializadas. Nesse caso, a coleta de dados foi realizada para compreender fenômenos físicos que pudessem explicar o fenômeno que causou a queda da ponte após a colisão da balsa.

Essas pesquisas ajudaram as alunas a descobrir o fenômeno gerado a partir da colisão da balsa com uma das pilastras da ponte. Esse contato as direcionou a buscarem, na área da Física, argumentos que explicassem esse fenômeno. Assim, fazendo uso de definições de fenômenos físicos as alunas foram agrupando definições, resultando ao final na elaboração do modelo matemático que descrevia a queda da ponte.

Deste modo, tem-se configurado no desenvolvimento das atividades “Solução de Água e Sal”, “Resistência Física Homem x Mulher” e “Ponte do Rio Moju/PA”, que os alunos e a professora mediadora ao investigarem essas temáticas partilharam de seus conhecimentos individuais, que somados resultaram em uma rede semântica coletiva. Esta rede era alimentada: pela troca de conhecimentos entre os participantes que vinham de diferentes períodos do curso de Matemática; pela relação estabelecida entre a professora mediadora e os alunos que trocavam experiências e discutiam possibilidades para as modelagens; e pela interatividade entre os alunos e a professora mediadora com as tecnologias digitais que resultaram na elaboração/interação/análise de tabelas, gráficos e pesquisas na *internet*.







Essa atuação foi percebida em alguns momentos do desenvolvimento de cada atividade. Por exemplo, na atividade “Resistência física homem x mulher”, a professora além de auxiliar o grupo promovendo discussões e reflexões, também foi sujeita investigada pelas alunas. Em outro momento, na atividade “Ponte do Rio Moju/PA”, a professora incentivou as alunas, que pela falta de dados mensuráveis da ponte investigada, queriam desistir da temática.

É natural no processo de Modelagem Matemática que as atividades sejam desenvolvidas de maneira cooperativa, ou seja, em grupos. Bassanezi (2011) expõe essa singularidade quando fala da escolha do tema, alegando que é importante que as temáticas sejam escolhidas pelos alunos para que eles se sintam corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, no entanto, cabe ao professor negociar a viabilidade, ou não, da temática escolhida. Assim, percebe-se que professor e alunos, imbuídos de suas subjetividades, porém com pensamentos coletivos, combinam conhecimentos para investigar determinada temática.

Percebemos, partindo disso, que somada a essa cooperação nas ações da professora mediadora e dos alunos em torno das temáticas abordadas, o uso do computador, da internet e de planilhas eletrônicas também foi requerido. Deste modo, amplificando o alcance dessas ações, e reforçando a redefinição dos papéis assumidos pela professora mediadora e os alunos no processo de ensino e aprendizagem em um ambiente informatizado.

Essa remodelação de funções no processo de ensino e aprendizagem mediado pela metodologia da Modelagem Matemática em um contexto informatizado vai ao encontro do que propõe Assmann (2000), pois a parceria entre os alunos, a professora mediadora e as tecnologias digitais, configurou uma rede semântica, também conhecida como “mixagens cognitivas complexas e cooperativas”, que subsidiou as investigações das temáticas das atividades.

## REFERÊNCIAS

ASSMANN, H. A metamorfose do aprender na sociedade da informação. **Revista Ciência da Informação**. V. 29. n2. Brasília mai/ago. 2000.

ARAÚJO, J. de L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA,

A. D.; ARAÚJO, J. de L. (orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**, Recife, v. 3, 2007.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino – aprendizagem com modelagem matemática**. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. 4a reimpressão. São Paulo: Editora Contexto, 2014.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: Da teoria à prática**. 14. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

FIGARO, R. A triangulação metodológica em pesquisas sobre a comunicação no mundo do trabalho. **Revista Fronteiras – estudos mediáticos**. V. 16. n2. Porto Alegre mai/ago. 2014.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1997.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em ambiente de Modelagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2004.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PINHEIRO, E. M.; KAKEHASHI, T.Y.; ANGELO, M. The use of videotaping in qualitative research. **Rev Latino-am Enfermagem**, 2005.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Pesquisa qualitativa: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada**. 2. ed. – Porto Alegre: Artmed, 2008.

**Submetido em:** 19 de fevereiro de 2019.

**Aprovado em:** 09 de abril de 2019.