REAMEC
REVISTA DA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

APONTAMENTOS SOBRE A METAFÍSICA DO CÁLCULO NOS MANUSCRITOS MATEMÁTICOS DE KARL MARX

NOTES ON THE METAPHYSICS OF CALCULUS IN THE MATHEMATICAL MANUSCRIPTS OF KARL MARX

APUNTES SOBRE LA METAFÍSICA DEL CÁLCULO EN LOS MANUSCRITOS MATEMÁTICOS DE KARL MARX

Francisco Bruno L. de Alcântara* Iran Abreu Mendes**

RESUMO

Este artigo apresenta uma revisão descritiva de parte do manuscrito matemático de Karl Marx (1818-1883), especificamente sobre o cálculo diferencial e integral e objetiva identificar a metafísica do cálculo de Marx, fundamentada pelo materialismo histórico dialético. Portanto, o problema de pesquisa do artigo consiste em examinar os manuscritos matemáticos de Marx, no qual explora o cálculo infinitesimal sob uma perspectiva materialista dialética. A pesquisa realizada é de natureza interpretativa, do tipo documental; comenta as anotações matemáticas de Marx para compreender a sua epistemologia do cálculo. Os resultados apontam para a identificação das noções metafísicas e a epistemologia do cálculo presentes na publicação póstuma de Marx, revelam através da interpretação de suas críticas ao cálculo de Newton e Leibniz, a sua proposta de uma abordagem baseada no materialismo histórico dialético. O exame analítico dos manuscritos também destaca a importância da atividade produtiva e das relações sociais de produção na compreensão do uso do cálculo por Marx.

Palavras-chave: Metafísica do cálculo. Manuscritos matemáticos de Marx. Cálculo diferencial e integral. Epistemologia do cálculo.

ABSTRACT

This article presents a descriptive review of part of Karl Marx's (1818-1883) mathematical manuscript, specifically on differential and integral calculus, and aims to identify the metaphysics of Marx's calculus, grounded in historical dialectical materialism. Therefore, the research problem of the article consists of examining Marx's mathematical manuscripts, where he explores infinitesimal calculus from a dialectical materialist perspective. The research conducted is interpretative in nature, of a documentary type; it analyzes Marx's mathematical notes to understand his epistemology of calculus. The results point to the identification of the metaphysical notions and the epistemology of calculus present in Marx's posthumous publication, revealing, through the interpretation of his criticisms of Newton and Leibniz's calculus, his proposal for an approach based on historical dialectical materialism. The analysis of the

* Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI). Doutorando em Educação em Ciências e Matemática na Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Professor do Instituto Federal do Maranhão (IFMA), Grajaú, Maranhão, Brasil. Endereço para correspondência: BR-226, s/n, Bairro Vila Nova, Grajaú, Maranhão, Brasil, CEP: 65940-000. E-mail: bruno.linhares@ifma.edu.br.
** Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço: Rua Augusto Corrêa, 01, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP:66075-110. E-mail: iamendes1@gmail.com.

manuscripts also highlights the importance of productive activity and the social relations of production in understanding Marx's use of calculus.

Keywords: Metaphysics of calculus. Marx's mathematical manuscripts. Differential and integral calculus. Epistemology of calculus.

RESUMEN

Este artículo presenta una revisión descriptiva de parte del manuscrito matemático de Karl Marx (1818-1883), específicamente sobre cálculo diferencial e integral, y pretende identificar la metafísica del cálculo de Marx, basada en el materialismo histórico dialéctico. Por tanto, el problema de investigación del artículo consiste en examinar los manuscritos matemáticos de Marx, en los que explora el cálculo infinitesimal desde una perspectiva materialista dialéctica. La investigación realizada es de carácter interpretativo, de tipo documental; Comentarios sobre las notas matemáticas de Marx para comprender su epistemología del cálculo. Los resultados apuntan a la identificación de las nociones metafísicas y la epistemología del cálculo presentes en la publicación póstuma de Marx, revelando a través de la interpretación de sus críticas al cálculo de Newton y Leibniz, su propuesta de un enfoque basado en el materialismo histórico dialéctico. El examen analítico de los manuscritos también destaca la importancia de la actividad productiva y de las relaciones sociales de producción para comprender el uso del cálculo por parte de Marx.

Palabras clave: Metafísica del cálculo. Manuscritos matemáticos de Marx. Cálculo diferencial e integral. Epistemología del cálculo.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta uma revisão descritiva e comentada de uma parte do manuscrito matemático de Karl Marx (1818-1883), referente ao cálculo diferencial e integral, a fim de identificar a metafísica do cálculo de Marx em sua base fundada no materialismo histórico dialético. Trata-se do exame interpretativo de uma parte dos manuscritos matemáticos de Marx, que constituem uma coleção de notas matemáticas escritas no final do século XIX, nas quais ele tentou explicar a derivação dos fundamentos do cálculo infinitesimal a partir de primeiros princípios em consonância com sua interpretação materialista dialética. De um modo geral, tais notas foram reunidas em quatro tratados independentes, organizados da seguinte maneira: Sobre o Conceito da Função Derivada, Sobre o Diferencial, Sobre a História do Cálculo Diferencial, e Teorema de Taylor, Teorema de MacLaurin e Teoria das Funções Derivadas de Lagrange.

De acordo com informações mencionadas por Pradip Baksi (1968; 2020), provavelmente esses escritos datam originalmente do período de 1873 a 1883, mas que somente em 1933, cinquenta anos após a morte de Marx, foram publicadas algumas partes de seus manuscritos, incluindo suas reflexões sobre os fundamentos do cálculo diferencial, que ele havia resumido para Engels em 1881, em dois manuscritos acompanhados de material preparatório. Essas publicações em tradução russa foram divulgadas em dois periódicos: o primeiro na revista “Sob a Bandeira do Marxismo” (1933, n.º 1, pp. IS-73) e o segundo na coleção “Marxismo e Ciência” (1933, pp. S-61).

Porém, somente em 1968, foi publicado o conjunto dos manuscritos matemáticos de Marx, de forma mais completa, contendo suas observações sobre os conceitos do cálculo ou outras questões matemáticas, mas que teve sua primeira tradução integral inglesa publicada somente em 1983 por Sofya Yanovskaya, em um texto organizado num volume de 569 páginas distribuídas em blocos conforme sumariamos a seguir:

Figura 1 – Sumário da publicação dos manuscritos matemáticos de Marx.

Pré-textuais: Nota do editor Nota do tradutor e agradecimentos Abreviaturas Prefácio da edição de 1968 Karl Marx - Manuscritos Matemáticos Parte I: Cálculo Diferencial: Sua Natureza e História Dois manuscritos sobre cálculo diferencial Rascunhos e adicionais a "sobre a diferencial" Sobre a história do cálculo diferencial Teoremas de Taylor e Maclaurin. Teoria de Lagrange das Funções Analíticas Apêndice ao Manuscrito "Sobre a História do Cálculo Diferencial". Análise do Método de D’Alembert Parte II: Descrição dos Manuscritos Matemáticos Manuscritos do período anterior a 1870	Manuscritos da década de 1870 Manuscritos da década de 1880 Pós-Textuais Apêndice Notas e Índices Suplemento Especial: Marx E Matemática Introdução Parte 1: História Sobre a História dos Manuscritos Matemáticos de Marx Parte 2: Investigações Investigações Inspiradas nos Manuscritos Matemáticos de Marx: Uma Seleção Parte 3: Matemática Matemática: Passado, Presente e Futuro.

Fonte: Adaptado de Baksi (2020)

É importante destacar nesta seção introdutória que cada uma das partes que está explicitada pormenorizadamente no sumário da tradução examinada se constitui em matéria prima de pesquisa sobre o tema e pode gerar um estudo descritivo e comentado sobre a parte dos manuscritos que será abordada neste texto. Caberá ao leitor pensar qual a melhor maneira de investir em um estudo mais aprofundado para que possa melhor compreender sobre quais aspectos Marx tomou as ideias concernentes ao cálculo diferencial.

A esse respeito, diversos estudiosos sobre a obra de Marx asseveram que seus manuscritos matemáticos dedicam-se principalmente a descrever e explicar a natureza e a história do cálculo diferencial. Contudo, neste trabalho nos deteremos principalmente sobre os aspectos da obra, relacionados à história das ideias, especialmente sobre o cálculo simbólico, a

https://doi.org/10.26571/reamec.v13.19653 2318-6674

matemática e a lógica, bem como os sistemas de signos em geral, envolvidos nos manuscritos sobre o cálculo diferencial elaborados por Marx.

É com esse espírito que o texto está estruturado em cinco seções. A primeira aborda aspectos relacionados ao entendimento acerca da metafísica e sua importância no desenvolvimento de investigações matemáticas, tendo em vista compreender os modos como o materialismo histórico dialético estabelecido por Marx se constituiu na base diretriz para a estruturação de seus manuscritos sobre o cálculo diferencial.

A segunda seção contém uma revisão bibliográfica de publicações recentes sobre o tema, como uma possibilidade de descrever sinteticamente apontamentos de trabalhos elaborados sobre o manuscritos matemáticos de Marx, tendo em vista focar aspectos essenciais desses trabalhos e assim caracterizar suas reflexões sobre o desenvolvimento histórico e epistemológico do assunto, na perspectiva materialista dialética.

A terceira seção trata exclusivamente da descrição comentada dos manuscritos matemáticos de Marx feita por Paulus Gerdes (1952-2014) em um livro intitulado *Os manuscritos filosófico-matemáticos de Karl Marx sobre o cálculo diferencial – uma introdução* (2008). No referido livro Gerdes faz uma descrição comentada acerca do manuscrito matemático, de modo a responder as seguintes questões: por que Marx se dedicou aos estudos em Matemática e qual o conteúdo dos manuscritos matemáticos de Marx, de que modo o método histórico dialético se manifesta nas suas reflexões matemáticas e qual a relevância desse escrito para a compreensão do desenvolvimento do cálculo?

Na quarta seção, abordamos as noções gerais do cálculo presente nos manuscritos, conforme a visão marxista, na qual se inclui os comentários de Marx acerca da Fórmula de Taylor-Maclaurin. O trabalho se encerra com nossas reflexões finais intencionando fazer uma apreciação sobre o que foi tratado ao longo do texto em relação ao legado deixado por Marx acerca da história das ideias concernentes ao cálculo diferencial.

2 A METAFÍSICA EM INVESTIGAÇÕES ACERCA DO CÁLCULO

Para iniciar nossa abordagem acerca do tema em questão nesta seção, admitimos que as investigações em matemática não se restringem a meras manipulações de símbolos e números em equações que são alimentadas por esses objetos matemáticos para descrever, com certa precisão, alguma realidade no universo das possibilidades. O estudo acerca da fronteira do que fundamenta a matemática não se limita em si e transpassa para a *metafísica* - o ramo da filosofia que investiga a natureza dos objetos que sustentam a construção de uma teoria, os seus pressupostos (axiomas), e a existência dos entes que fundamentam uma ideia. Porém, a primeira inquietação indagativa surge: mas o que é metafísica? Este conceito foi formulado ao longo da história e, no contexto deste artigo, admitimos como o ramo da filosofia que estuda o ser, a substância, a existência, a causalidade e o tempo. Esclarecemos, ainda, que a metafísica tem suas raízes na filosofia pré-socrática de expoentes como Parmênides (530 – 460 a.C) e Heráclito (500 – 450 a.C), que se fundamentaram nessa escola filosófica, conforme esclarecem Kirk, Raven e Schofield (2010).

Ao investigar os filósofos pré-socráticos, Kirk, Raven e Schofield (2010) relatam que há um único escrito principal atribuído a Parmênides: o poema *Sobre a Natureza* (*Peri Physeos*), no qual o filósofo discorre acerca da natureza fundamental do ser verdadeiro. Os aspectos principais na filosofia de Parmênides são focados na imutabilidade e na permanência, por meio das quais postula que o ser é uno, imutável, eterno e indivisível. Para se alcançar a verdade, ele duvida da capacidade dos sentidos, ao considerá-los enganosos e incapazes de revelar a natureza do ser, uma vez que a verdade seria alcançada exclusivamente pelo exercício da razão pura. Por este motivo, Parmênides é considerado o fundador da *ontologia*, ramo da filosofia que estuda o ser.

Em contraposição à visão de Parmênides, Kirk, Raven e Schofield (2010), apresentam a metafísica de Heráclito, marcada pela ênfase na mudança, reforçada pela ideia do *devir* (vir a ser), presente em sua famosa frase “tudo flui e nada permanece”. Heráclito via a realidade como uma constituição da tensão e a unidade dos opostos, onde a harmonia é alcançada pela luta dos contrários. Em sentido estritamente oposto a Parmênides, Heráclito confiava na experiência sensorial como uma força para compreender a mudança, embora reconhecesse a necessidade de uma compreensão racional. A esse respeito, apresentamos a seguir o quadro 1 com características comparativas entre as metafísicas dos dois filósofos pré-socráticos com relação as noções de realidade, mudança, unidade, sentidos e razão.

Quadro 1 - Comparação entre a metafísica de Heráclito e Parmênides

Característica	Heráclito	Parmênides
Realidade	Fluxo constante, devir, mudança perpétua	Ser uno, imutável, eterno, indivisível
Mudança	Fundamental e essencial à realidade	Ilusão dos sentidos, não pertencente ao Ser
Unidade	Unidade na tensão dos opostos	Unidade absoluta e indivisível do Ser

Sentidos	Importantes para perceber o fluxo	Enganosos, obscurecem a verdade do Ser
Razão	Importante para compreender o Logos	Única via para o conhecimento verdadeiro do Ser
Metafísica Central	Metafísica do fluxo e da mudança	Metafísica do Ser e da permanência

Fonte: Elaborado pelos autores baseado em Kirk, Raven e Schofield (2010)

A ontogênese[1] da metafísica, pode ser entendida como a exploração da origem e do desenvolvimento da metafísica enquanto área de estudo da filosofia. É marcada pela evolução da própria filosofia grega e medieval. Do ponto de vista grego destacam-se dois filósofos pós-socráticos, a saber, Platão (428 – 348 a.C) e seu discípulo Aristóteles (384 – 322 a.C), que ao estudarem a metafísica, apresentam dois modos distintos de observar a realidade do ser. Enquanto Platão propõe um realismo ontológico transcendente, em que apenas por meio da razão seria possível atingir a verdade sobre os entes que a compõem, em contraponto ao seu mestre, Aristóteles propõe o realismo ontológico imanente, quando afirma que é por meio dos sentidos atrelados ao *logos*[2], que se chega a verdade do ser.

Cientes da extensa literatura existente, a exploração dessas correntes é necessária para uma fundamentação mais adequada de interpretação do objeto focal desta seção. Neste sentido, para tratar da distinção entre as realidades advogadas em Platão e Aristóteles, Iglesias (2010), aponta que para os objetos sensíveis (um número, por exemplo), há divergência com relação à transcendência e à imanência desses objetos. Platão postula ideias transcendentes, separadas do mundo sensível, enquanto Aristóteles defende ideias imanentes, próprias à entes particulares. Essa distinção se reflete em suas visões sobre a relação entre o universal e o particular, com Platão a transformar o universal em algo transcendente e Aristóteles considera o *eidos*[3] imanente como a própria essência da coisa. Ainda que Sócrates tenha marcado o pensamento de ambos, Aristóteles preserva uma maior fidelidade à sua visão inicial dos universais imanentes. O quadro 2 apresenta e elucida este comentário acerca dos realismos ontológicos em Platão e em Aristóteles.

[1] A ontogênese é o estudo acerca da evolução de uma ideia/teoria.
[2] Significa razão, o sentido, o valor, a causa, o fundamento de alguma coisa, o ser da coisa.
[3] A palavra eidos, do grego εἶδος, está relacionada ao verbo *idein*, que significa ver. Para Aristóteles, eidos se refere à forma ou aparência de algo, aquilo que é atingido pelos sentidos. Platão aprofunda esta ideia e trata o eidos como a essência imutável e eterna de algo.

Quadro 2 - Comparação analítica do realismo ontológico em Platão e em Aristóteles

Característica	Platão	Aristóteles
Teoria das Ideias	Ideias transcendentes, como realidades em si, separadas das coisas sensíveis	Ideias (eidos) imanentes nas coisas particulares
Universal vs. Particular	Transformou o universal em transcendente, o que causa aporias na relação entre universal e particulares	Endossa o eidos imanente, considerando-o a essência da coisa
Influência de Sócrates	Afasta-se da imanência socrática	Aceita o eidos idêntico imanente, próximo à posição de Sócrates
Destino do eidos	O eidos, se presente na coisa, desaparece com ela. Platão questiona para onde ele vai e de onde vem.	O eidos permanece imanente nas coisas particulares, sendo a essência da coisa

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Iglesias (2010)

Diante da visão grega sobre o significado de metafísica, tomamos como aporte para proceder ao exame acerca da visão marxista do cálculo, nos questionamos: quais noções metafísicas do cálculo são possíveis de serem identificadas nos manuscritos matemáticos de Marx? Nos manuscritos matemáticos de Marx identificamos suas críticas ao cálculo formulado por Isaac Newton (1643-1727), quando destaca como pontos centrais de discordância com a sua visão materialista, as abordagens sobre as noções de infinito e infinitésimo nos escritos de cálculo newtoniano. A posição sobre a ideia de infinito é essencial para o entendimento do cálculo, pois esclarece conceitos, teoremas, postulados e teorias que surgem no processo de axiomatização e aceitação desses conceitos de gênese filosófica, pelos matemáticos.

A ideia de infinito está presente na mente humana desde épocas mais remotas, não sendo possível desvencilhar a noção de infinito matemático do desenvolvimento filosófico e religioso (Lópes, 2014). Com o desenvolvimento conceitual do cálculo infinitesimal, nos trabalhos de Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1616-1716), a noção de infinitésimos, ou seja, de grandezas infinitamente pequenas, passaram a determinar e facilitar o cálculo relacionado a objetos matemáticos como a área de superfícies, volumes de sólidos, retas tangentes a curvas, dentre outros entes matemáticos que compõem a rede conceitual que estrutura o cálculo diferencial. Diversos matemáticos procuraram responder problemas em aberto que tinham como cerne a ideia de infinito presente no cálculo infinitesimal.

É certo que após o desenvolvimento de pesquisas que fizeram surgir o ramo da análise matemática, com o intuito de dar fundamentos às pesquisas já realizadas pela comunidade matemática, a visão sobre o cálculo passou a adotar como lente interpretativa internalista, os

https://doi.org/10.26571/reamec.v13.19653 2318-6674

axiomas dos números reais, por se admitir que em uma teoria matemática que usa a lógica dedutiva era necessário possuir solidez em seus fundamentos. No caso do cálculo, postulados como o *axioma da completude* ou o seu equivalente, postulado de Richard Dedekind (1831-1916), afirma que *todo subconjunto não-vazio de* $\mathbb{R}$, *constituídos de elementos positivos, tem um ínfimo* (Figueiredo, 2014, p.9). A compreensão aprofundada dessas noções fundamentais, que sustentam a estrutura do cálculo, é essencial para avançar em seus conceitos e aplicações, o desenvolvimento lógico do cálculo depende da clareza e da precisão de seus pressupostos iniciais.

Ao tratarem dos sistemas de axiomas que são os pressupostos de uma teoria segundo a qual todos os teoremas devem ser consequência, autores como Mendelson (1997) e Shoenfield (1967) apresentam três propriedades que sustentam os sistemas, a saber: consistência, completude e independência. A consistência é a característica de um conjunto de axiomas que garante que não haja teoremas diferentes que se oponham em uma mesma teoria, caso isso ocorra, a teoria não é válida. A completude se refere ao fato de que quaisquer teoremas possam ser demonstrados a partir dos axiomas pré-estabelecidos. Caso surja um teorema que necessite de uma afirmação alheia à teoria para garantir a sua validação, então esta teoria não está completa, e exige a inclusão de pelo menos mais uma premissa no conjunto de axiomas. A independência é a propriedade que garante que não seja possível demonstrar a validade de um axioma a partir de outro qualquer dentro da teoria. Se for possível demonstrar um axioma a partir de outro, então um desses é um teorema e deve ser excluído do conjunto axiomático.

Axiomas, portanto, são um conjunto de verdades adotadas sem necessidade de verificação. São noções concebidas como verdadeiras através da observância da realidade e da condição de existência dos objetos, as quais chamamos de realidade ontológica. O termo ontologia apresenta raízes gregas, *onto* vem do grego "*einai",* que significa "ser" ou "existir". Ou seja, cabe a ontologia inquerir sobre a existência dos objetos, estudar sobre a natureza *ser*, da realidade e da existência.

Contudo, a investigação sobre a natureza do conhecimento matemático e seu desenvolvimento histórico revela influências que transcendem a mera observação da realidade imediata, adentrando o terreno das filosofias que moldaram a visão de mundo dos pensadores e, consequentemente, suas contribuições para os diversos campos do saber, incluindo a própria matemática. Entre essas abordagens filosóficas, destaca-se a visão materialista de Karl Marx, cuja análise do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, embora menos conhecida que suas contribuições em outras áreas, oferece um ângulo singular sobre a gênese e a compreensão dessas ferramentas matemáticas, discutidas com mais detalhes a seguir.

2.1 Sobre o materialismo histórico dialético de Marx

Para entender a metafísica do cálculo diferencial de Marx é necessário primeiramente tratar do materialismo histórico dialético de Marx, como forma de retomar pontos relacionados a estruturação histórica de sua abordagem acerca dos temas matemáticos e para tal, recorremos inicialmente a um excerto do ensaio intitulado *Sobre o Materialismo Dialético e o Materialismo Histórico*, atribuído a J. V. Stálin, de setembro de 1938[4], segundo o qual:

> O materialismo dialético é a concepção filosófica do Partido marxista-leninista. Chama-se materialismo dialético, porque o seu modo de abordar os fenômenos da natureza, seu método de estudar esses fenômenos e de concebê-los, é *dialético*, e sua interpretação dos fenômenos da natureza, seu modo de focalizá-los, sua teoria, é materialista. [...] O materialismo histórico é a aplicação dos princípios do materialismo dialético ao estudo da vida social, aos fenômenos da vida da sociedade, ao estudo desta e de sua história (Stálin, 1938; 1945).

Com base nos princípios enunciados no excerto citado anteriormente, podemos considerar que o materialismo histórico dialético de Marx é uma filosofia e também método de análise da sociedade e da história que enfatiza a importância da matéria, ou seja, da produção material, como base para a compreensão do desenvolvimento humano. Assim, a dialética se constitui em um método de análise que considera o movimento e o desenvolvimento das coisas através da contradição e da interação entre elementos opostos.

Igualmente, no caso do manuscrito de matemática, Marx enfatiza a importância da atividade produtiva e das relações sociais de produção, que forneceu o contexto para se entender a natureza e o uso do cálculo. Em sua análise materialista histórica sobre o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, Marx destaca a importância do cálculo como ferramenta para a compreensão e transformação da realidade material, ou seja, um instrumento potente para analisar a formação dos preços, a exploração do trabalho e a dinâmica das relações sociais de produção dentro da lógica do capitalismo, principalmente para analisar a renda diferencial, que se refere à diferença de rentabilidade entre diferentes propriedades de terra, demonstrando como o cálculo podia ser usado para analisar a distribuição de riqueza, a exploração do trabalho capitalista, a geração de mais-valia e a dinâmica das relações sociais de produção dentro do

[4] Primeira edição: setembro de 1938. Fonte: Sobre o Materialismo Dialético e o Materialismo Histórico, Rio de Janeiro: Edições Horizonte, 1945.

capitalismo. O materialismo dialético de Marx vê a história como um processo de transformação e mudança, que também influenciou o desenvolvimento do cálculo, em uma evolução conforme as mudanças sociais e as necessidades da produção.

2.2 Sobre os manuscritos de Marx

No âmbito da filosofia da matemática, a perspectiva materialista de Marx oferece um olhar distinto sobre o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Apesar da vasta divulgação de suas ideias na Economia e na Teoria Social, sua exploração do campo matemático permanece notavelmente escassa. Seus manuscritos sobre matemática indicam uma tentativa de aplicar a dialética materialista à compreensão dos conceitos fundamentais empregados no cálculo.

Com base no fundamento da dialética compreendido como a negação da negação, Marx mostrou seus posicionamentos a partir da visão materialista do cálculo diferencial e integral, presente e esclarecida em produções pouco conhecidas desse autor, em matemática, compiladas em uma publicação póstuma, intitulada Mathematical Maniscripts of Karl Marx (1968; 1983). Nesse sentido, apresentamos o posicionamento presente na obra, no qual se realiza uma crítica aos métodos desenvolvidos no cálculo diferencial e integral: as abordagens de Newton e Leibniz, as quais o autor cunhou de "método místico"; a abordagem de D'Alembert e Euler, adjetivada de "racionalista"; e a abordagem de Lagrange, à qual ele denomina "cálculo algébrico".

Marx possui uma vasta produção em Filosofia, Economia, Historiografia, Sociologia e Política, mundialmente conhecidas, mas a produção matemática de Karl Marx, amplia a nossa compreensão acerca da versatilidade temática dos seus estudos e reflexões. Para situar o leitor acerca desta afirmação, elaboramos o quadro 3, baseados em trabalhos biográficos realizados por Wheen (2007), Heinrich (2018), Netto (2020), a fim de apresentar uma lista com os principais trabalho produzidos por ele, em campos de conhecimento como Economia, Filosofia, História, Política, Sociologia e Matemática, que atestam sua frutífera produção; esta última que é a menos conhecida no cenário científico se trata da qual nos detivemos a examinar neste artigo.

Quadro 3 - Lista de produção científica de Karl Marx

Título da produção científica	Conteúdo	Ano de produção
Manuscritos Econômico-Filosóficos	Economia	1844
Notas sobre a Crítica da Economia Política		1858
Crítica da Economia Política		1859
Esboços Econômicos		1860
O Capital – Volume I		1867
O Capital – Volume II		1885
O Capital – Volume III		1894
Crítica da Filosofia do Direito de Hegel	Filosofia	1843
A Sagrada Família		1845
Tese sobre Feuerbach		1888
A Ideologia Alemã		1932
A Luta de Classes na França de 1848 a 1850	História	1850
Manuscritos Matemáticos	Matemática	(1881; 1933) – 1968
O Manifesto Comunista	Política	1848
A Questão Judaica	Sociologia	1843
A Guerra Civil na França		1871
Sobre a Questão da Moradia		1871
Crítica do Programa de Gotha		1875
A Crítica do Programa de Gotha		1875

Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir do quadro 3 é perceptível que as áreas em que Marx obteve maior empenho intelectual foram Economia, Filosofia e Sociologia. Sabe-se, ainda, que a sua obra de maior difusão é O Capital. Contudo, a nossa investida centra-se na sua produção intelectual em Matemática, mais precisamente no tocante a abordagem materialista dada ao cálculo, em que é necessário o emprego de estratégias sofisticadas para apreciar objetos matemáticos que aparecem com certa frequência nos trabalhos de cálculo publicados ulteriormente a ele, como as noções de infinito e de infinitésimo.

Sobre o desenvolvimento das noções materialistas, que veem o infinito como uma entidade dinâmica, “Marx, sendo hegeliano de formação, aplica o seu método não ao mundo das ideias mas à realidade material” (Donário e Santos, 2016, p.6). Isto significa que na concepção dialética de realidade, na qual as mudanças e construções são singulares na compreensão dos fenômenos, em especial no modelo referente ao cálculo elaborado por Marx, o infinito não consiste em uma entidade fixa, como um número, mas é visto como um ente matemático inacabado, em constante mudança. Portanto, em sua visão de limite, o valor de uma função se aproxima continuamente de outro, sem necessariamente assumi-lo.

3 UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE PUBLICAÇÕES RECENTES SOBRE O TEMA

Em um artigo intitulado *The mathematics of Marx: in the bicentenary of the birth of Karl Marx (1818–1883), em homenagem ao* bicentenário do nascimento de Marx, publicado em novembro de 2018, na revista *Lettera Matematica* (volume 6, p. 221–225), o italiano Andrea Ricci, discorre sobre o tema destacando que os manuscritos matemáticos se constituem em uma obra menos conhecida de Marx, na qual a redescoberta da Matemática coincidiu com o renascimento da lógica de Hegel. Eles são principalmente dedicados à fundação lógica do cálculo diferencial. De acordo com Ricci, o método de Marx é histórico-genético, idêntico ao usado em sua crítica da Economia Política e mostra que o objetivo de Marx é derivar a derivada diretamente do processo de variação da função, de modo que sua origem algébrica e real seja alcançada. Ricci (idem) reitera que em métodos anteriores, as diferenciais eram entidades individuais com conteúdo substancial, enquanto em Marx, ao contrário, elas são inseparáveis como numerador e denominador na razão diferencial, que é um símbolo operacional unitário que indica um conjunto ordenado de operações lógicas. Essa noção é notavelmente semelhante ao conceito moderno de algoritmo, tornando Marx um precursor da matemática computacional moderna.

Em uma publicação mais recente, o matemático Pradip Baksi (2020) lançou uma versão atualizada do livro *Karl Marx and Mathematics* em uma edição em língua inglesa, pela editora Routledge. Trata-se da segunda edição revisada e ampliada do Suplemento Especial de Karl Marx, Manuscritos Matemáticos, editado pelo autor (Baksi, 1994). É uma coletânea dos vários textos sobre Karl Marx e Matemática e algumas informações biográficas sobre seus respectivos autores foram indicadas ao final de cada texto.

Neste texto Pradip Baksi comenta que o surgimento e o desenvolvimento do movimento da Etnomatemática implicou em mudanças na nossa compreensão sobre a história da evolução da matemática plural no planeta Terra desde o Neolítico, posto que a redescoberta e o estudo de alguns dos textos-fonte, antes negligenciados, impulsionaram ainda mais as investigações sobre a história subsequente das culturas matemáticas, incluindo aquelas sobre as histórias da álgebra e da análise em algumas das línguas antigas e medievais da Ásia, como o sânscrito, o árabe e o malaiala. Consequentemente, esse movimento possibilitou as tentativas de preenchimento de lacunas referentes à compreensão da história da Matemática dominante, não apenas na época de Marx, mas também na época da edição dos manuscritos matemáticos de Marx no século XX, e até mesmo hoje.

A esse respeito há um destaque importante a ser mencionado neste trabalho; trata-se do texto intitulado *Marx and Mathematics*, de autoria de Dirk J. Struik (1997), publicado como um capítulo do livro *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*, editado por Arthur B. Powell e Marilyn Frankenstein. No referido capítulo Struik comenta como a perspectiva particular centrada no materialismo dialético de Marx o levaram a desenvolver uma elaboração teórica para discorrer sobre as ideias concernentes aos fundamentos do cálculo diferencial.

De um modo geral a intenção de Marx era apresentar uma abordagem para o cálculo diferencial que refletisse as origens dialéticas sistemáticas de seus fundamentos e aspirava usar técnicas matemáticas que pudessem resistir à crítica dialética para elaborar princípios econômicos quando apropriado. Considerando que sua sofisticação matemática chegou um pouco tarde para esse último propósito, há amplo espaço para aprimorar tanto sua técnica quanto a forma como os formalismos matemáticos estão inseridos em sua apresentação dialética.

Outra reflexão nessa mesma perspectiva é apresentada pelo pesquisador Alcouffe (1988) ao abordar esses aspectos afirmando que a principal razão para o enfoque dado ao trabalho de Marx deve-se ao interesse manifestado na França para a filosofia da ciência, em geral, para os relatórios de Filosofia e Matemática, especialmente. Neste sentido, Alcouffe não esconde que sua atenção foi atraída para as obras matemáticas de Marx sob o ponto de vista da economia política, tanto como professor quanto como historiador do pensamento. Assim, Alcouffe (1988) concluiu que os manuscritos de Marx se manifestam como um material importante para o economista, mas também para o matemático e o filósofo, ou a outros interessados no assunto. Ainda nesta mesma esteira de reflexão, Alcouffe destaca que os manuscritos são, de certa forma, matérias-primas cuja leitura pode fornecer elementos básicos de reflexão para quem questiona sobre a natureza e os fundamentos da atividade matemática, sob um enfoque da história social do conhecimento.

Outro destaque é uma publicação com a intenção de organizar uma síntese da trajetória intelectual de Karl Marx, com vistas a apontar os interesses de Marx pelo cálculo infinitesimal, que culminaram na sua obra póstuma, *Karl Marx Mathematische Manuskripte*, na qual são discutidos aspectos fundamentais da sua produção matemática nos escritos sobre este autor, realizados por Paulus Gerdes (2008), conforme apresentamos na seção a seguir.

4 OS MANUSCRITOS MATEMÁTICOS DE MARX POR PAULUS GERDES

A respeito da publicação sobre os manuscritos matemáticos de Marx traduzidos para a língua inglesa em 1983, o pesquisador Paulus Gerdes fez uma publicação intitulada *Karl Marx: "Arrancar o véu misterioso à matemática"*, e reeditada com o título *Os Manuscritos Filosófico-Matemáticos de Karl Marx Sobre o Cálculo Diferencial: Uma Introdução*, em 2008, na qual aborda principalmente o porquê Marx se dedicou aos estudos em Matemática, qual o conteúdo dos manuscritos matemáticos de Marx, de que modo o método dialético se manifesta na reflexões matemáticas e qual a relevância desse escrito para a compreensão do desenvolvimento do cálculo.

Com a finalidade de apresentar apontamentos a respeito das questões lançadas anteriormente, iniciaremos a nossa perscruta apresentando o objeto de estudo de Gerdes (2008) concernente ao cálculo infinitesimal nos manuscritos matemáticos de Marx. Ao relatar a história da publicação póstuma dos manuscritos matemáticos de Marx, Gerdes (2008), nos assevera que após a morte de Marx, seus documentos foram herdados pelos social-democratas alemães, e que estes não haviam compreendido o papel da dialética na matemática e na natureza, o que corroborou para a tardia publicação da obra. Apenas em 1931, no Congresso Internacional sobre História da Ciência e da Tecnologia, em Londres, o professor Ernest Colman (1893-1979), publicou uma lista de estudos não divulgados de Marx, sobre a matemática, as ciências naturais e a tecnologia, bem como a história dessas disciplinas. Em 1933, a revista *Pod snamenem marxisma* publica, em ocasião do 50° aniversário de sua morte, parte dos manuscritos matemáticos. Esta publicação instigou especialistas. Apenas dois anos após a primeira publicação, o matemático soviético Valerri I. Glivenko (1897-1940) publicou *The Concept of Differential according to Marx and Hadamard* (1935), que apresenta como Marx, recorrendo à investigação dialética, indica como ocorreu a transição da álgebra para o cálculo diferencial. Ao longo dos anos, vários outros pesquisadores se dedicaram ao estudo sobre a visão dialética na Matemática, inspirados pelos recortes publicados de trechos do manuscrito. Uma equipe de cientistas russos, liderados por Sofya Yanovskaya (1896-1966), após anos de estudo consegue decifrar, separar e organizar todo o material e em 1968, por ocasião do 150° aniversário do nascimento de Marx, sai a publicação completa dos manuscritos matemáticos de Marx.

Ainda a esse respeito, Gerdes (2008) destaca que o material completo soma aproximadamente 1000 páginas, compostas por resumos a respeito de álgebra, aritmética, análise e geometria, além de 19 esboços e estudos independentes sobre Matemática. A maior parte da atenção dada por Marx, em seus manuscritos, é ao cálculo diferencial, tendo completado duas pesquisas a esse respeito em sua obra.

A versão em inglês dos manuscritos de 1983, após as reedições, soma 312 páginas, contendo o prefácio à edição russa, três cartas entre Marx e Engels e estudos de Marx sobre cálculo diferencial e integral, sendo este último assunto, o conteúdo mais tratado ao longo do texto. As três correspondências entre Marx e Engels, datadas do período entre agosto de 1881 e novembro de 1882, explicitam o interesse de Marx pelo cálculo diferencial e apontam para descobertas independentes que hoje em dia estão presentes nos livros de cálculo, como por exemplo, o uso do diferencial $\frac{dy}{dx}$ como um símbolo que não deve ser confundido com a indeterminação $\frac{0}{0}$.

Gerdes destaca que na primeira carta, datada de 10 de agosto de 1881, Engels afirma ter lido os manuscritos matemáticos de Marx e compreendido o método adotado por ele de modo a não incorrer na indeterminação. Criticando o modelo matemático do Cálculo divulgado à época, que Marx chama de místico, uma alusão clara ao modo não-materialista da visão matemática desse período. A segunda carta presente na obra, foi enviada à Marx em 21 de novembro de 1882, é mais curta, contendo apenas um parágrafo, no qual ele comenta que o método diferencial é um método algébrico disfarçado, citando o modelo adotado por Marx para calcular a derivada de uma função. A última carta presente na obra foi enviada por Marx a Engels em 22 de novembro de 1882. Nela, ele faz uma crítica aos modelos conhecidos na época, como o método de Newton e Leibniz, ao qual ele chama de método místico, o método de d'Alembert e Euler, ao qual ele considera racionalistas e o método estritamente algébrico de Lagrange, que ele comenta iniciar com a mesma perspectiva básica original de Newton. Ele conclui afirmando que praticamente nada de essencial mudou no desenvolvimento histórico no cálculo, uma vez que a representação geométrica não apresenta mudanças significativas. Isto é, na aplicação geométrica do cálculo diferencial.

Além das cartas, Gerdes reitera que a publicação póstuma apresenta, como citamos anteriormente, estudos sobre o cálculo, realizados por Marx, sendo o primeiro sobre o conceito de função derivada, o segundo sobre o diferencial, o terceiro sobre o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, que não foi concluído e por fim, sobre o Teorema de Taylor, Teorema de MacLaurin e as Teorias de Funções derivadas de Lagrange. Entretanto, se faz necessário avançar na descrição comentada sobre as noções gerais relativamente ao cálculo

https://doi.org/10.26571/reamec.v13.19653 2318-6674

estabelecido por Marx.

5 NOÇÕES GERAIS DE CÁLCULO NA VISÃO DE MARX

A primeira parte apresentada nos manuscritos, intitulada *"Sobre o conceito de função derivada"*, foi escrita em 1881, na qual está descrito um cálculo puramente algébrico para encontrar a derivada de funções que hoje conhecemos por função analítica. Isto é, uma função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se analítica num ponto $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{D}$ se é igual a uma série de potências de $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ (série de Taylor) em alguma vizinhança de $\boldsymbol{a}$. No tocante às séries de Taylor, Marx (1983, p.110-113) realizou um estudo que, embora as bases do cálculo estivessem sendo estabelecidas por Cauchy nesse período, não é possível garantir que Marx tivesse conhecimento de quais funções seriam ou não analíticas (Grande e Smilgys, 2018, p.74).

Na referida primeira parte dos manuscritos, já mencionada, Marx faz uma crítica com o intuito de esclarecer a sua visão sobre o que é o limite de um número, ao afirmar que "isso simplesmente vem da tautologia bem usada de que o valor de uma quantidade é igual ao limite de seu valor" (Marx, 1983, p. 105), e ainda reitera seu ponto de vista sobre limite ao afirmar que:

> O conceito de valor limite pode, portanto, ser interpretado erroneamente, e é constantemente interpretado erroneamente (missdeutet). Ele é aplicado em equações diferenciais como um meio de preparar o caminho para a definição de x_1-x ou h = 0 e de trazer este último mais próximo de sua apresentação: - uma infantilidade que tem sua origem nos primeiros métodos místicos e mistificadores de cálculo (Marx, 1983, p. 105, tradução nossa)

O termo místico aparece ao longo do texto para reforçar o seu posicionamento materialista que vê em autores anteriores, como Newton e Leibniz promulgadores de abordagens que não se coadunam com a filosofia marxista ao tratar o infinito como uma entidade estática, e por estática nos referimos a um ente matemático que não admite mudança, como um número. Para Marx, é inconcebível tratar o infinito como estático, pois ele via o infinito como uma expressão do movimento contínuo, assim como tratava o limite não como um ponto alcançável, mas como um processo no qual um ponto x é negado e atribui-se a este um valor x_1, para em seguida negar novamente este x_1 e assumir novamente o valor x.

A primeira função tratada por Marx é a função linear $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax}$, um fato interessante é o de que ele não delimita o conjunto ao qual as variáveis pertencem, ficando subentendido que ele trata de variáveis reais, embora o método proposto por Marx também seja eficiente em funções analíticas de domínio complexo. Diferente do método empregado por Newton, Marx não parte da soma $\boldsymbol{x + dx = x_1}$ para realizar o cálculo da derivada. O seu ponto de partida é a diferença $\boldsymbol{x_1 - x = \Delta x}$, onde $\boldsymbol{x_1 > x}$, e consequentemente, $\boldsymbol{y_1 - y = a(x_1 - x)}$. Marx faz a observação de que, para $\boldsymbol{x_1 = x}$ e $\boldsymbol{y_1 = y}$ teremos $\boldsymbol{0 = a \cdot 0}$. Neste ponto, ele explicita onde surge o materialismo dialético na operação de derivada, ao relatar que:

> (...) primeiro fazer a diferenciação e então removê-la, portanto, leva literalmente a nada. Toda a dificuldade em entender a operação diferencial (como na negação da negação em geral) está precisamente em ver como ela difere de um procedimento tão simples e, portanto, leva a resultados reais (Marx, 1983, p.3, tradução nossa).

Em seguida, tomando nota dos processos algébricos necessários para apresentar o seu método, ele toma $\boldsymbol{\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a}$. Chegando a conclusão de que, $\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x_1 - x)}{x_1 - x} = a}$. Ou seja, a derivada da função linear $\boldsymbol{y = ax}$ é $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = a}$. Após este exemplo, onde o autor realiza a aplicação de seu materialismo no percurso para encontrar a derivada da função, Marx ainda realiza uma crítica ao modelo racionalista vigente na época ao afirmar que

> A crença arraigada de alguns matemáticos racionalistas de que dy e dx são quantitativamente, na verdade, apenas infinitamente pequenos, apenas se aproximando $\boldsymbol{\frac{0}{0}}$, é uma quimera, que será demonstrada ainda mais palpavelmente em II *[Se referindo ao seu outro trabalho intitulado Sobre o diferencial]*. Quanto à característica mencionada acima do caso em questão, o valor limite (Grenzserr) das diferenças finitas é, portanto, também ao mesmo tempo o valor limite dos diferenciais. (Marx, 1983, p.5, tradução e grifo nossos)

De fato, embora a produção marxista em Matemática seja escassa e modesta, as suas assertividades são inegavelmente atuais. Gerdes (2008, p.83), ao estudar a obra póstuma sobre Matemática, afirma que a análise de Marx, ao incorporar a negação da negação em seu modo de ver a Matemática conduziu a profícuas descobertas que são pertinentes, vivas e atuais, culminando em várias empreitadas acadêmicas a respeito dos manuscritos matemáticos de Marx com o objetivo de encontrar solução para problemas de fronteira entre a Matemática e a Filosofia, tais como "a relação entre a Matemática e a realidade material; o papel do método axiomático na Matemática; o rigor na fundamentação matemática; o conteúdo e o significado da Matemática simbólica; o problema da infinidade" dentre outros.

Além da função linear, o trabalho "Sobre o conceito de função derivada" apresenta mais três exemplos de funções que são analisadas através da negação da negação, dispostas no quadro 4.

Quadro 4 - Funções analisadas por Marx no manuscrito "Sobre o conceito de função derivada"

Função	Nomenclatura Moderna	Derivada
$y = x$	Função Identidade	$\frac{dy}{dx} = 1$
$y = ax^3 + bx^2 + cx + e$	Função Polinomial de grau 3	$\frac{dy}{dx} = 3ax2 + 2bx + c$
$y = ax^m$	Função monomial de grau m	$\frac{dy}{dx} = amxm - 1$
$y = a^x$	Função Exponencial	$\frac{dy}{dx} = ax.lna$
$y = \sqrt{a^2 + x^2}$	Função Irracional	$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Fonte: Elaborado pelos autores

Vejamos, a seguir, a aplicação do método da negação da negação empregada por Marx para encontrar a derivada da função monomial de grau m. Para o conceito de derivada de Marx, é necessário visualizar $\boldsymbol{x_1} > \boldsymbol{x}$. Assim, nas páginas 9 - 10, ele encontra a derivada de $\boldsymbol{y = ax^m}$. Ele inicia discorrendo que quando $\boldsymbol{x}$ se torna $\boldsymbol{x_1}$, então $\boldsymbol{y}$ se torna $\boldsymbol{y_1}$. (Essa caracteriza a primeira negação) Marx escreve:

$$\boldsymbol{y_1 - y = a(x_1^m - x^m) = a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + \cdots + x_1x^{m-2} + x^{m-1})}$$

O procedimento seguinte, para encontrar a derivada foi fruto da segunda etapa da dialética, onde ele nega a negação inicial. Desse modo, ele parte do movimento de negar a realidade material com o objetivo de obter resultados reais. Escreve,

$$\boldsymbol{\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + \cdots + x_1x^{m-2} + x^{m-1})}$$

Voltando a tomar $\boldsymbol{x_1 = x}$ (negação da negação), $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = a(x^{m-1} + x^{m-2}x + x^{m-3}x^2 + \cdots + xx^{m-2} + x^{m-1})}$, o que resulta em $\boldsymbol{m}$ parcelas iguais a $\boldsymbol{x^{m-1}}$. Portanto, a conclusão de Marx é a de que $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = amx^{m-1}}$.

Sem realizar um juízo de valores, adotando uma postura imparcial e analítica, percebemos em Marx um esforço por relacionar as bases do seu materialismo histórico dialético como uma ferramenta metodológica para o cálculo do que hoje conhecemos por derivadas de uma função analítica.

https://doi.org/10.26571/reamec.v13.19653 2318-6674

Ainda no tocante a negação da negação, em sua pesquisa Gerdes (2008) relata ter utilizado como ferramenta em demonstrações de exercícios matemáticos. Relatando:

> Em outubro de 1982 realizou-se em Paramaribo, a capital do Suriname, a conferência sobre Matemática em Benefício dos Povos Caraíbas. Nesta conferência proferi uma palestra intitulada *Matemática ao Serviço do Povo*. Nela distingui, de entre as estratégias individuais-coletivas para reforçar a autoconfiança dos estudantes nos seus poderes criadores, uma estratégia em que o raciocínio dialéctico desempenha um papel extremamente importante (Gerdes, 2008, p. 86).

Na sequência, ele propõe aos alunos um modo de encontrar a função derivada de $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}}$, onde $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$. Podemos notar que este exemplo não conta na obra de Marx e ao utilizar o movimento de negação da negação o pesquisador concluiu que a derivada de $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{f}^{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}$. Ele comenta que a primeira negação aparece quando, em meio ao processo resolutivo, ocorre a multiplicação do quociente $\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}}{x_1-x_0}$ por $\sqrt{\boldsymbol{x_1}} + \sqrt{\boldsymbol{x_0}}$. Para reestabelecer o equilíbrio, se fez necessário multiplicar também o denominador por $\sqrt{\boldsymbol{x_1}} + \sqrt{\boldsymbol{x_0}}$. Neste passo surge a negação da primeira negação e a partir daí a possibilidade de transformação. Ele apresenta em sua obra outros exemplos da lei da negação da negação no pensamento matemático. Sendo eles na geometria, na álgebra, na trigonometria e no cálculo de limites de uma função. Desta forma, aponta potencialidades didáticas para o uso do exercício da dialética em sala de aula através de uma análise crítica e reflexiva dos Manuscritos Matemáticos de Karl Marx.

A nossa pesquisa fornece uma compreensão embrionária acerca da visão epistemológica de Karl Marx no tocante ao cálculo diferencial e integral, que tem como premissa a sua abordagem materialista que difere das concepções e noções adotadas pela comunidade matemática do século XIX. Portanto, a utilização do materialismo histórico dialético na compreensão dos conceitos de infinitésimos, limites de uma função, derivadas de uma função, por exemplo, revelam uma postura inovadora e autêntica que corrobora com a perspectiva filosófica adotada pelo autor.

Diante da análise dos manuscritos matemáticos, percebemos uma abordagem dialética, crucial para compreender sua visão sobre conceitos do cálculo, sua crítica aos métodos tradicionais adotados em sua época que estabelece local para uma discussão mais aprofundada acerca da relação entre a Matemática e a realidade material.

A partir dos conceitos de cálculo sob a ótica do materialismo histórico dialético, é perceptível como Karl Marx elaborou a sua metodologia objetivado a deduzir qual seria a função derivada de uma função dada. Seu método algébrico, baseado na negação da negação,

https://doi.org/10.26571/reamec.v13.19653 2318-6674

confronta os modelos vigentes na época ao passo que propõe uma nova maneira de entender as transições entre álgebra e cálculo, antes da popularização do desenvolvimento da Análise Matemática, realizado por Cauchy. Destacamos que sua visão epistemológica possibilita implicações para o ensino de matemática, ao oferecer uma abordagem mais crítica e reflexiva acerca do desenvolvimento epistemológico dessa disciplina. Destarte, como ele compreendia as contradições sociais como motores da história, vê nas contradições inerentes à Matemática e a suas ferramentas como indispensáveis para o avanço e desenvolvimento científico.

Obviamente não é esperado que todas as ideias matemáticas de Marx acerca do cálculo sejam esgotadas neste artigo, tampouco que haja uma investigação aprofundada da sua visão epistemológica do desenvolvimento histórico do cálculo. Contudo, espera-se que o leitor encontre uma fonte clara que aponte indícios históricos da visão materialista concernentes a conceitos do cálculo, como a ideia de limite, a noção de infinito como entidade dinâmica e o método de derivada de uma função baseada na *negação da negação*.

O trabalho desenvolvido por Marx difere daqueles de maior destaque e prestígio, como a sua obra em Economia e em Teoria Social. Isto ocorre por alguns fatores, dentre os quais podemos destacar o interesse de pesquisa do autor pela Matemática, pois não há razões concretas para crer que a sua investigação acerca do cálculo tenha sido motivada pela elaboração de seu trabalho em O Capital, uma vez que várias ideias mais sofisticadas presentes em seus manuscritos matemáticos não apareçam em seus trabalhos mais conhecidos em Economia. Outro ponto que se faz mister é a confiabilidade do trabalho, por se tratar de uma obra póstuma, há a necessidade de validação na comunidade científica. Contudo, o montante de cartas datadas do século XIX entre o autor e Engels reforça a veracidade de autoria, pois no conteúdo das cartas, embora breves, são majoritariamente sobre indagações de Engels quanto à visão epistemológica do cálculo e a explicação de Marx, a luz do materialismo.

A nossa proposta na próxima seção é discutir sobre os posicionamentos que sustentam a visão materialista do cálculo diferencial e integral elaborada e proposta por Karl Marx com base no fundamento da dialética presente em uma análise da fórmula de Taylor-MacLaurin, realizada provavelmente 1883.

5.1 Os comentários de Marx acerca da Fórmula de Taylor-Maclaurin

As discussões de Marx acerca do Teorema de Taylor principiam com uma crítica ao método de Newton e de Leibniz, que ele entende, como já citado anteriormente, por método místico, em virtude de noções metafísicas, e até certo ponto dúbias, adotadas pelos criadores do cálculo, mais precisamente nos conceitos de infinito e infinitésimo. Para ambientar o leitor, Marx (1983) cita que o teorema binomial de Newton, que ele crê ser uma descoberta, propiciou uma revolução na álgebra que culminou numa teoria geral de equações. Ele complementa que a literatura da época acreditava que este teorema era derivado dos teoremas de Taylor e MacLaurin. Para Marx,

> ambos os teoremas são grandes generalizações nas quais os próprios símbolos diferenciais se tornam o conteúdo da equação. No lugar das funções derivadas sucessivas reais de *x*, apenas as derivadas são representadas, na forma de seus equivalentes simbólicos, que indicam apenas tantas estratégias de operações a serem realizadas, independentemente da forma da função de ***f(x + h)***. E assim duas fórmulas são obtidas que, com certas restrições, são aplicáveis a todas as funções específicas de ***x*** ou ***x + h*** (Marx, 1883, p. 88, tradução nossa).

Ele continua a apresentar as duas fórmulas, destacando suas particularidades e seu potencial para grandes generalizações, como ele mesmo apontou. Sabe-se hoje que, ao mencionar os diferenciais, a concepção de funções que o filósofo alemão utilizava corresponde ao que entendemos por funções analíticas.

Na busca marxista por uma explicação materialista do cálculo, especialmente em relação a entidades como os infinitésimos, centrais para a compreensão de limites, continuidade, derivadas, diferenciais e integrais, a leitura desses dois teoremas revela nuances na escrita. Contudo, ao apresentar as ideias de seus idealizadores, Marx manteve-se rigorosamente fiel, afirmando que Taylor expõe sua expansão como $f(x+h)$ ou $y_1 = y + \frac{dy}{dx} \cdot h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$, MacLaurin escreve $f(x)$ ou $y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$.

Estas particularidades são mais do que meras práticas de escrita, hábitos adquiridos ou caprichos de cada matemático. As diferenças na escrita desvelam sutilezas de raciocínio próprias de cada período histórico em que foram produzidas, elas revelam ainda a maturidade intelectual acerca de noções matemáticas ligadas ao cálculo, como os infinitésimos e os diferenciais, por exemplo. Foge ao escopo desta seção realizar juízo de valores quanto ao conteúdo analisado e proposto por Marx, tampouco é objetivo deste trabalho atribuir aos Manuscritos Matemáticos de Marx um cunho que não lhe é devido, como de ensaio de uma nova matemática ou algo parecido. Os escritos acerca do cálculo estudados e apresentados na publicação póstuma desse autor, aponta sobremaneira para a sua visão acerca da realidade, que a partir da Matemática divulgada na época, critica pontos que lhe são considerados como transcendência metafísica, que não coaduna com a sua perspectiva filosófica materialista histórico-dialética.

Buscar uma relação direta com a matemática moderna que faz uso de conceitos desenvolvidos e divulgados posteriormente ao período em que os manuscritos foram escritos, principalmente em virtude do desenvolvimento histórico da Análise Matemática, é caracterizado como anacronismo. Ao tratar deste conceito, Mendes (2023) aponta que:

> Anacronismo em história da matemática corresponde a uma coleção de estudos de caso, nos quais cada um discute uma instância em que a história da matemática foi deturpada. Outro tipo de anacronismo pode ocorrer quando o sentido dado aos conceitos na matemática atual são incorretamente atribuídos a fatos matemáticos e personagens históricas da matemática do passado, ou seja, atribuir ao passado uma realidade epistêmica que não se coaduna com o período histórico analisado (Mendes, 2023, p.71).

Para evitar interpretações equivocadas nas pesquisas históricas, Mendes (2023) enfatiza a crescente necessidade de os pesquisadores se apropriarem do conceito de anacronismo. Nesse sentido, apresentamos a investigação de Marx sobre a história matemática do Cálculo, com o objetivo de explicar sua perspectiva materialista acerca da fórmula de Taylor-MacLaurin. Após investigar a fórmula e compará-la ao binômio de Newton, o autor dos manuscritos conclui que sua aparência é histórica e teoricamente caracterizada pelo que ele denomina aritmética do cálculo diferencial. A apresentação de sua investigação prossegue com a análise individual das fórmulas, começando pela perspectiva de Taylor e, em seguida, pela visão de MacLaurin.

A partir da notação usual, o polinômio de Taylor de ordem n para uma função f derivável até a ordem n em um intervalo de reais que contenha um real arbitrário $\boldsymbol{x_0}$ é $\boldsymbol{P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$. O Polinômio de MacLaurin é um caso particular do Polinômio de Taylor de Ordem n, sendo $\boldsymbol{P(0)}$, desde que 0 seja elemento do intervalo adotado.

Marx, em suas anotações sobre o Cálculo, inicia reconhecendo a relação entre os teoremas de Taylor e MacLaurin, onde este último se configura como um caso particular do primeiro. Com este entendimento como ponto de partida, sua publicação registra o seguinte:

> Se definirmos $\boldsymbol{x = 0}$ em $\boldsymbol{f(x + h)}$ e também no lado direito, em $\boldsymbol{y}$ ou $\boldsymbol{f(x)}$ e em suas funções derivadas simbólicas da forma $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$, $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}}$, $\cdots$, de modo que consistam simplesmente no desenvolvimento dos elementos constantes de $\boldsymbol{x}$, então $\boldsymbol{f(h) = y +}$

https://doi.org/10.26571/reamec.v13.19653 2318-6674

> $\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot \boldsymbol{h} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\cdot \frac{h^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\cdot \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$. Então $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{h})$ se torna a mesma função de $\boldsymbol{h}$ que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ é de $\boldsymbol{x}$; já que $\boldsymbol{h}$ entra em $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h})$ assim como $\boldsymbol{x}$ entra em $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$e $(\boldsymbol{y})$ em $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, todo traço de $\boldsymbol{x}$ é eliminado (Marx, 1983, p. 89, tradução nossa).

Sob a ótica materialista de Marx, a questão central reside no fato de que, apesar das aparentes conexões entre o binômio de Newton e o desenvolvimento do cálculo com o surgimento futuro das Séries de Taylor-MacLaurin, não existem evidências de que o "método místico" de Newton – assim denominado por Marx devido às noções metafísicas presentes no cálculo newtoniano – tenha capacitado o inglês a formular algum teorema precursor análogo ao de Taylor, conforme a análise do filósofo alemão. Ele assevera que, caso houvesse esse desenvolvimento, não seria plausível crer que Newton tenha desenvolvido tais teoremas para uso particular em seus trabalhos em Mecânica. De acordo com Marx:

> Agora pode-se perguntar: Newton não deu apenas o resultado ao mundo, como ele faz, por exemplo, nos casos mais difíceis na Arithmetica Universalis [Aritmética Universal], tendo já desenvolvido em completo silêncio os teoremas de Taylor e MacLaurin para seu uso privado a partir do teorema binomial, que ele descobriu? Isso pode ser respondido com absoluta certeza no negativo: ele não era alguém que deixava para seus alunos o crédito por tal descoberta. Na verdade, ele ainda estava muito absorvido em elaborar as próprias operações diferenciais, operações que já são assumidas como dadas e bem conhecidas em Taylor e MacLaurin. Além disso, Newton, como suas primeiras fórmulas elementares de cálculo mostram, obviamente chegou a elas a princípio de pontos de partida mecânicos, não aqueles de análise pura. Quanto a Taylor e MacLaurin, por outro lado, eles trabalham e operam desde o início no próprio terreno do cálculo diferencial e, portanto, não tinham razão para procurar seu ponto de partida algébrico mais simples possível, ainda menos porque a disputa entre os newtonianos e leibnizianos girava em torno das formas definidas e já concluídas do cálculo como uma disciplina da matemática recém-descoberta e completamente separada, tão diferente da álgebra usual quanto o céu é vasto (Marx, 1983, p. 90, tradução nossa).

A esse respeito, Marx (1881, p.92), enfatiza que um avanço significativo nos temas do cálculo é realizado por Lagrange ao recusar o que lhe parece transcendência metafísica "nas fluxões de Newton, nos infinitesimais de diferentes ordens de Leibnitz, no teorema do valor limite de quantidades que desaparecem, na substituição de dxdy como um símbolo para o coeficiente diferencial, etc.". A ênfase dada a este fato por Marx se deve ao fato de que, em seu período, o cálculo já possuía sua forma final, alcançada somente após o desenvolvimento das expansões de funções analíticas em séries de potências nos polinômios que utilizam diferenciais, realizadas por Taylor e MacLaurin. Embora a base algébrica para essa teoria tenha sido primordialmente desenvolvida por Lagrange (1736-1813), John Landen (1719-1790), um matemático inglês do século XVIII, talvez tenha sido um precursor nesse movimento. Marx não apresenta comentários posteriores sobre Landen, o que nos impede de afirmar suas conclusões sobre a origem dos estudos do cálculo com bases algébricas mais firmes. Todavia, para Christine Phili (1994), o trabalho de John Landen é considerado a primeira tentativa de algebrização do cálculo infinitesimal, quando houve um ponto de virada no século XVIII, por ocasião do processo de algebrização que transformou a face metafísica da análise.

Na perspectiva de Marx, tratou-se de uma base mais firme que implicou num afastamento de aspectos metafísicos e uma aproximação de entes matemáticos materialistas, que podem ser percebidos pelos sentidos e que não são meras manipulações simbólicas abstratas. Isto porque, conforme Christine Phili (1994), foi devido ao prestígio da álgebra, que naquele momento o cálculo passou a adquirir uma capacidade de integrar a exatidão ao mecanismo do raciocínio que se confirmaram na relação intrínseca das operações constitutivas da análise com as operações propriamente algébricas anunciadas posteriormente na concepção lagrangiana, o que indica Lagrange como o principal representante da algebrização da análise, posteriormente a Landen.

As convicções materialistas de Marx permeiam inequivocamente seus escritos matemáticos, nos quais a cognição nessa área se encontra intrinsecamente relacionada à sua *práxis* e *episteme*, impulsionando-o a interpretar as noções matemáticas basilares do cálculo sob uma perspectiva não transcendental, uma construção argumentativa que se justifica pela estreita relação entre história, antropologia e epistemologia, tal como sugere Luis Radford (2011) em suas reflexões teórico-práticas acerca do desenvolvimento histórico da matemática em contextos socioculturais diversos, com enfoque na teoria da objetivação do conhecimento matemático, centrada nas relações epistemológicas que envolvem o materialismo histórico dialético.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a realização de um estudo histórico-documental e problematizador sobre uma parte dos manuscritos matemáticos de Karl Marx, compreendemos que suas ideias se apresentam como uma contribuição relevante para a história e a filosofia da Matemática, na forma de um potencial que poderá fortalecer diversas pesquisas em História da Matemática e em Educação Matemática. Primeiramente, a singularidade de sua abordagem materialista e dialética sobre o tema nos convida a repensar o desenvolvimento histórico e epistemológico das ideias referentes ao cálculo diferencial e integral, com vistas a identificar novas maneiras de ensinar e aprender essa parte da matemática.

Compreendemos que foi através de um exame crítico das bases filosóficas da Matemática, que Marx nos ofereceu uma perspectiva valiosa e pertinente para as mais diversas investigações sobre a Matemática fundada no materialismo histórico dialético, pois seus manuscritos matemáticos pertencem inegavelmente tanto à história social, em geral, como também à história da Matemática e da Filosofia. Além do aspecto histórico, surge uma implicação reflexiva sobre a relevância dos manuscritos, pois sua leitura interessa hoje, tanto para o matemático ou o filósofo, como para professores de Matemática e estudantes dos cursos de licenciatura em Matemática.

Nesta direção interpretamos que ao perscrutar um vasto conjunto de autores que contribuíram para a fundação do cálculo, Marx, em sua produção inacabada de manuscritos historiográfico-analíticos, elabora um texto que nos oferece uma leitura potencializadora de cognição matemática sobre problemas conceituais no desenvolvimento desse campo de conhecimento, notadamente sobre certas indeterminações utilizadas sem validação formal no processo natural de maturação da teoria, muitas das quais encontraram respostas com o surgimento e a evolução da Análise como extensão do cálculo infinitesimal.

Contudo, há um aspecto essencialmente determinante que emerge do manuscrito de Marx sobre o cálculo diferencial e integral em sua abordagem centrada no materialismo histórico dialético. Trata-se da expansão conceitual gerada na sua metafísica do cálculo, que oferece outras possibilidades de se pensar o cálculo para além das questões estritamente matemáticas, mas em suas conexões diretas com questões sociais, econômicas e políticas que muito interessavam aos seus estudos na época em que os manuscritos foram produzidos, e que atualmente merecem uma nova interpretação em função das situações contemporâneas que estamos vivendo na sociedade planetária. Esse é o nosso desafio.

REFERÊNCIAS

ALCOUFFE, Alain. Marx, Hegel et le “Calcul”. In: Marx, K. (ed). **Les Manuscrits Mathematiques**. Paris: Economica, 1988.

BAKSI, Pradip. **Karl Marx Mathematical Manuscripts**. Together With a Special Supplement. Translator of Marx's Mathematical Manuscripts (M., 1968) and Editor of the Special Supplement., Pradip Baksi. Calcutá: Viswakos Parisad, 1994.

BAKSI, Pradip. **Karl Marx and Mathematics, 1st Edition** (Editor). Routledge, 2020.

DONÁRIO, João; SANTOS, Carlos. **A teoria de Karl Marx**. São Paulo: Editora XYZ, 2016.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise I. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

GERDES, Paulus. **Os manuscritos filosófico-matemáticos de Karl Marx sobre o cálculo diferencial**: uma introdução. Lulu. com, 2008.

GRANDE, Ricardo Mendes; SMILGYS, Thaís Helena. Dialética e Matemática em Marx. In: SCUCUGLIA, Ricardo Rodrigues da Silva. **Processos formativos em educação matemática**: perspectivas filosóficas e pragmáticas. 1. Ed. Porto Alegre: Editora Fi, 2018.

IGLÉSIAS, Maura. As aporias das ideias imanentes. **O que nos faz pensar**, v. 19, n. 28, p. 233-245, 2010.

KIRK, Geoffrey Stephen; RAVEN, John Earle; SCHOFIELD, Malcolm. **Os filósofos pré-socráticos**: história crítica com seleção de textos. 7. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LÓPEZ, Claudia Andrea. El infinito en la historia de la matemática. **Ciencia y tecnología**, 2014.

MARX, Karl. **Mathematical Manuscripts of Karl Marx**. London: New Park Publications Ltd.,1983.

MENDELSON, Elliott. **Introduction to mathematical logic**. 4ed. Boca Rota: Chapman and Hall, 1997.

MENDES, Iran Abreu. Uma revisão do livro Anacronismos na História da Matemática: ensaios sobre a interpretação histórica de textos matemáticos. **Revista Brasileira de História da Matemática**. São Paulo, v. 23, n. 47, p. 69–82, 2023. https://doi.org/10.47976/RBHM2023v23n4769-82

PHILI, Cristine. John Landen: First Attempt for the Algebrization of Infinitesimal Calculus. In: Kostas Gavroglu; Jean Christianidis; Efthymios Nicolaidis (Editors). **Trends in the Historiography of Science**. Springer, Boston Studies in the Philosophy and History of Science (BSPS, volume 151), 1994, pp 279–293.

RADFORD, Luis. **Cognição matemática**: história, antropologia e epistemologia. Organização e Revisão Técnica Bernadete Morey e Iran Abreu Mendes. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

RICI, Andrea. The mathematics of MarxIn the bicentenary of the birth of Karl Marx (1818–1883). Springer: Lettera Matematica. https://doi.org/10.1007/s40329-018-0241-5

SHOENFIELD, Joseph Robert. **Mathematical logic**. Reading, Massachussets: Addison-Wesley, 1967.

STÁLIN, J. V. **Sobre o materialismo dialético e o materialismo histórico**. Reimpressão da primeira edição de 1938. Rio de Janeiro: Edições Horizonte, 1945.

APÊNDICE 1 – INFORMAÇÕES SOBRE O MANUSCRITO

AGRADECIMENTOS
Ao CNPq e a CAPES pelo financiamento das pesquisas e da formação na Pós-graduação.

FINANCIAMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Também foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA
Resumo/Abstract/Resumen: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes
Introdução: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes
Referencial teórico: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes
Análise de dados: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes
Discussão dos resultados: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes
Conclusão e considerações finais: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes
Referências: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes
Revisão do manuscrito: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes
Aprovação da versão final publicada: Francisco Bruno L. de Alcântara e Iran Abreu Mendes

CONFLITOS DE INTERESSE
Os autores declararam não haver nenhum conflito de interesse de ordem pessoal, comercial, acadêmica, política e financeira referente a este manuscrito.

DISPONIBILIDADE DE DADOS DE PESQUISA
Os dados desta pesquisa não foram publicados em Repositório de Dados, mas os autores se comprometem a socializá-los caso o leitor tenha interesse, mantendo o comprometimento com o compromisso assumido com o comitê de ética.

PREPRINT
Não publicado.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

COMO CITAR - ABNT
ALCÂNTARA, Francisco Bruno L. de; MENDES, Iran Abreu. Apontamentos sobre a metafísica do cálculo nos manuscritos matemáticos de Karl Marx. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 13, *e*25022, jan./dez., 2025. https://doi.org/10.26571/reamec.v13.19653

COMO CITAR - APA
Alcântara, F. B. L. de & Mendes, I. A. (2025). Apontamentos sobre a metafísica do cálculo nos manuscritos matemáticos de Karl Marx. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, *13*, *e*25022. https://doi.org/10.26571/reamec.v13.19653

POLÍTICA DE RETRATAÇÃO - CROSSMARK/CROSSREF

Os autores e os editores assumem a responsabilidade e o compromisso com os termos da Política de Retratação da Revista REAMEC. Esta política é registrada na Crossref com o DOI: https://doi.org/10.26571/reamec.retratacao

OPEN ACCESS

Este manuscrito é de acesso aberto (*Open Access*) e sem cobrança de taxas de submissão ou processamento de artigos dos autores (*Article Processing Charges – APCs*).. O acesso aberto é um amplo movimento internacional que busca conceder acesso online gratuito e aberto a informações acadêmicas, como publicações e dados. Uma publicação é definida como 'acesso aberto' quando não existem barreiras financeiras, legais ou técnicas para acessá-la - ou seja, quando qualquer pessoa pode ler, baixar, copiar, distribuir, imprimir, pesquisar ou usá-la na educação ou de qualquer outra forma dentro dos acordos legais.

LICENÇA DE USO

VERIFICAÇÃO DE SIMILARIDADE

Este manuscrito foi submetido a uma verificação de similaridade utilizando o *software* de detecção de texto iThenticate da Turnitin, através do serviço *Similarity Check* da Crossref.

PUBLISHER

Universidade Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicação no Portal de Periódicos UFMT. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da referida universidade.

EDITOR

Dailson Evangelista Costa

AVALIADORES

Dois pareceristas *ad hoc* avaliaram este manuscrito e não autorizaram a divulgação dos seus nomes.

HISTÓRICO

Submetido: 15 de janeiro de 2025.
Aprovado: 20 de abril de 2025.
Publicado: 18 de maio de 2025.
