

USO DA ANÁLISE DE MODELOS NA PESQUISA QUANTITATIVA EM ENSINO

THE USE OF MODEL ANALYSIS IN QUANTITATIVE RESEARCH IN TEACHING

EL USO DEL ANÁLISIS DE MODELO EN INVESTIGACIONES CUANTITATIVAS EN LA ENSEÑANZA

José Uibson*

Fernando Frei**

RESUMO

Este ensaio teórico tem como objetivo apresentar e discutir as possibilidades de utilização da Análise de Modelos na pesquisa em ensino que faz uso de testes de múltipla escolha. Essa abordagem parte do princípio de que tais testes podem revelar, com maior profundidade, as concepções dos alunos sobre conceitos científicos. A partir de uma investigação bibliográfica, o ensaio examina a aplicação da Análise de Modelos em estudos internacionais e ressalta sua escassa presença na literatura nacional. A ferramenta tem se mostrado promissora para compreender padrões de pensamento dos estudantes, especialmente no que tange a concepções não científicas em temas como as Leis de Newton, frequentemente avaliadas por instrumentos como o *Force Concept Inventory* (FCI). Ao sistematizar e divulgar o potencial dessa ferramenta analítica, o trabalho busca contribuir com a consolidação de análises quantitativas mais aprofundadas no campo da pesquisa em ensino de Ciências, especialmente em Física.

Palavras-chave: Análise de Modelos. Pesquisa Quantitativa. Ensino de Física.

ABSTRACT

This theoretical essay aims to present and discuss the possibilities of using Model Analysis in educational research involving multiple-choice tests. This approach is based on the premise that such tests can reveal, in greater depth, students' conceptions about scientific concepts. Based on a bibliographic investigation, the essay examines the application of Model Analysis in international studies and highlights its limited presence in national literature. The tool has proven to be promising in understanding students' thinking patterns, especially regarding non-scientific conceptions in topics such as Newton's Laws, which are frequently assessed by instruments like the Force Concept Inventory (FCI). By systematizing and disseminating the potential of this analytical tool, the study aims to contribute to the consolidation of more in-depth quantitative analyses in the field of science education research, particularly in Physics.

Keywords: Model Analysis. Quantitative Research. Physics Teaching.

* Doutorando em Ensino (RENOEN-UFS). Professor da Licenciatura em Física do IFS – campus Lagarto, Sergipe, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Augusto Franco, 3553 – Condomínio Recanto dos Pássaros. Bloco A – Ap. 302, Bairro Ponto Novo, Aracaju, Sergipe, CEP: 49047-040. E-mail: jose.moraes@ifs.edu.br.

** Doutor em Saúde Pública. Professor do Departamento de Ciências Biológicas da Universidade Estadual Paulista (Unesp) – campus Assis, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua João Ramalho, 937, Bairro Vila Santa Cecília, Assis, São Paulo, CEP: 198061-81. E-mail: fernando.frei@unesp.br.

RESUMEN

Este ensayo teórico tiene como objetivo presentar y discutir las posibilidades de utilización del Análisis de Modelos en la investigación educativa que hace uso de pruebas de opción múltiple. Este enfoque parte del principio de que dichas pruebas pueden revelar, con mayor profundidad, las concepciones de los estudiantes sobre conceptos científicos. A partir de una investigación bibliográfica, el ensayo examina la aplicación del Análisis de Modelos en estudios internacionales y resalta su escasa presencia en la literatura nacional. La herramienta se ha mostrado prometedora para comprender los patrones de pensamiento de los estudiantes, especialmente en lo que respecta a concepciones no científicas en temas como las Leyes de Newton, evaluadas con frecuencia mediante instrumentos como el Force Concept Inventory (FCI). Al sistematizar y divulgar el potencial de esta herramienta analítica, el estudio busca contribuir a la consolidación de análisis cuantitativos más profundos en el campo de la investigación en enseñanza de las Ciencias, especialmente en Física.

Palabras clave: Análisis de Modelo. Investigación Cuantitativa. Enseñanza de la Física.

1 INTRODUÇÃO

Neste ensaio teórico, apresentamos a segunda ferramenta analítica proposta na tese de doutorado de Bao (1999), posteriormente detalhada em artigos (Bao; Hogg; Zollman, 2002; Bao; Redish, 2006). Essa ferramenta complementa a primeira, a Análise de Concentração (Bao; Redish, 2001). A premissa básica dessas ferramentas está na ampliação da compreensão dos conhecimentos dos alunos quando são submetidos a testes de múltipla escolha. Isso porque em tais testes, geralmente suas concepções são avaliadas com maior profundidade. Assim, conhecer as concepções dos alunos, seus equívocos em relação aos conceitos que se deseja abordar, é crucial para a eficácia do próprio ensino e para a aprendizagem, fato que foi o objetivo de muitas pesquisas no ensino de Física desde a década de 1980 (Champagne; Klopfer; Anderson, 1980; McCloskey; Caramazza; Green, 1980; McCloskey; Washburn; Felch, 1983).

Inicialmente a abordagem qualitativa foi utilizada para avaliar as concepções prévias dos estudantes por meio de entrevistas e questões abertas (aqueles em que os respondentes fornecem respostas usando suas próprias palavras). Como resultado, foi possível observar que os alunos trazem concepções que entram em conflito ou encorajam interpretações divergentes da visão científica. A partir dos resultados dessas pesquisas vários testes foram elaborados a fim de verificar tais concepções e possibilitar análises também de cunho quantitativo.

A título de exemplo, um dos principais testes criados e utilizados na pesquisa em ensino de Física é o *Force Concept Inventory* (FCI), desenvolvido por Hestenes, Wells e Swackhamer (1992), que possibilita avaliar concepções sobre as Leis de Newton, especialmente no que diz respeito em relação aos conceitos de Força e Movimento. Dentre essas concepções divergentes,

pode-se citar: necessidade de uma força para haver movimento, movimento implica em força ativa, composição não vetorial da velocidade e dissipação do ímpetus (Bao; Redish, 2001). Outra concepção recorrente dos alunos é a de que sempre deve existir uma força paralela ao vetor velocidade, independente da trajetória ser reta ou curva (Martín-Blas; Seidel; Serrano-Fernández, 2010).

Na pesquisa voltada para área de ensino, muitas técnicas analíticas são utilizadas na avaliação de testes (Ding; Beichner, 2009), porém com diferentes níveis de aprofundamento da real compreensão dos conhecimentos dos alunos. Assim, a Análise de Modelos se mostra promissora nesse percurso desde sua proposição (Bao, 1999), sendo utilizada internacionalmente na pesquisa no ensino de Física (Bao; Hogg; Zollman, 2002; Bao; Redish, 2006; Tongchai *et al.*, 2011), inclusive pesquisas com abordagem qualitativa (Hrepic; Zollman; Rebello, 2010). No âmbito nacional, observa-se uma imensa lacuna de pesquisas, em que destaca-se apenas o trabalho de Fernandes (2011).

A Análise de Modelos possibilita uma visão mais profunda da estrutura dos modelos mentais dos alunos, descrevendo em termos probabilísticos como ocorre a ativação de determinado modelo. Para tanto, agrupa-se as respostas dos alunos a um teste em três modelos distintos: Modelo 1 (M_1) – modelo do especialista, considerado o modelo correto, isto é, o modelo científico; Modelo 2 (M_2): modelo incorreto, diz respeito as concepções não científicas, porém são comuns dos alunos utilizarem; Modelo 3 (M_3): modelo nulo, considerado também incorreto, porém, reflete casos com baixa probabilidade de ocorrência (Bao; Hogg; Zollman, 2002; Bao; Redish, 2006).

Assim, o presente ensaio teórico tem como objetivo apresentar e discutir as possibilidades de utilização da Análise de Modelos na pesquisa em ensino que faz uso de testes de múltipla escolha. Para tanto, trata-se de uma investigação de cunho bibliográfico, pois tem como base trabalhos publicados que fizeram uso da análise citada. A vantagem da pesquisa bibliográfica é permitir ao “investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente” (Gil, 2017, p. 34). É observado que essa abordagem está presente na produção de muitos ensaios teóricos na área de ensino (Carvalho; Mafra; Ghedin, 2024; Moro; Romanatto, 2024).

Nesse sentido, este ensaio se justifica diante da escassez de estudos sobre a Análise de Modelos na literatura nacional, além de poder contribuir para a pesquisa quantitativa em ensino, apresentando esta ferramenta analítica e discutindo seus possíveis usos.

Desta forma, estruturamos nosso ensaio em 3 partes. Na primeira parte, são apresentadas

as premissas gerais da Análise de Modelos, o estado de modelo do aluno, a matriz densidade, o cálculo dos autovalores e autovetores dessa matriz e a representação dos estados do modelo do aluno. Em seguida, na segunda parte, são abordadas as aplicações dessa análise de acordo com a literatura da área, além de reflexões sobre a ampliação dessas aplicações. Por fim, finaliza-se este ensaio com as considerações e implicações desta análise para a pesquisa em ensino.

2 A ANÁLISE DE MODELOS

2.1 Premissas gerais

A aprendizagem, processo complexo e multifacetado, tem instigado pesquisadores em diferentes épocas a desvendar os mecanismos subjacentes ao ato de aprender.

Em relação aos conceitos físicos, as pesquisas mostram que os alunos não apresentam consistência quando estão envolvidos na resolução de problemas, pois:

Quando um conceito semelhante é apresentado em diferentes contextos físicos (por exemplo, perguntas diferentes sobre um único conceito), os alunos podem ter dificuldades em identificar a física correta e tendem a usar pedaços de conhecimento que são induzidos pelas características superficiais dos contextos específicos. Portanto, os alunos parecem funcionar como se tivessem uma mistura de modelos diferentes (corretos e incorretos) sem saber as circunstâncias apropriadas nas quais aplicá-los. Uma resposta específica pode ser desencadeada por uma combinação de circunstâncias externas e internas que geralmente são difíceis de determinar. Como resultado, quando os alunos respondem a perguntas em um teste, suas respostas parecem conter um pouco de aleatoriedade (Bao, 1999, p. 6).

Assim, é difícil conceber uma “teoria de aprendizagem unificada” que reunisse todos os elementos que expliquem com precisão como os alunos aprendem e utilizam seus conhecimentos, por exemplo. Porém, as teorias elaboradas elucidaram importantes elementos que estão envolvidos no processo de aprendizagem, permitindo assim, uma melhor análise e quantificação desses processos.

Nesse sentido, sobressai a ideia dos modelos mentais, que são “representações dinâmicas e generativas, que podem ser manipuladas mentalmente para fornecer explicações causais de fenômenos físicos e fazer previsões sobre o estado das coisas no mundo físico” (Bao, 1999, p. 7). Esses modelos sofrem modificações com o processo de escolarização e com a própria vivência dos indivíduos nos mais diversos ambientes.

A pesquisa no ensino de Física mostra que dentro de um mesmo domínio conceitual, os alunos apresentam em sua estrutura mental muitas inconsistências no uso de seus conceitos. E mesmo durante o processo instrucional coexistem uma mistura de visões dos alunos na compreensão de um fenômeno, assim, “o uso de ideias mistas (ou conceitos concorrentes) parece ser um estágio típico e importante na aprendizagem de física pelos alunos” (Bao, 1999, p. 10). É diante desse cenário que o referido autor propõe um modelo de aprendizagem conceitual que será abordado a seguir.

O ponto de partida de Bao (1999, p. 10) é que “os estados internos do aluno na aprendizagem são incertos para um observador externo e não podem ser medidos diretamente com a tecnologia atual. Mas [...], podem ser efetivamente inferidos pela análise dos dados de nossas observações”. Para tanto, o autor desenvolve um modelo apropriado para representar o processo de aprendizagem e um conjunto de ferramentas matemáticas que permitem processar corretamente os dados das observações e, a partir daí, obter informações relevantes sobre o conhecimento dos alunos ao serem submetidos a um teste dentro de um domínio conceitual.

Na construção do seu modelo de aprendizagem, Bao (1999) considera três importantes elementos mentais: princípios, modelos e fatos. São considerados como princípios os elementos gerais do contexto, geralmente envolvidos na diversidade de contextos existentes, por exemplo, as visões de mundo (crenças) dos alunos. Os modelos são “construções mentais funcionais que são associadas a contextos físicos específicos e podem ser aplicadas diretamente em diferentes instâncias de contexto para obter resultados explicativos” (Bao, 1999, p. 10). Como exemplo de modelos, temos os modelos mentais na perspectiva de Philip Johnson-Laird, que são definidos como uma “representação interna de informações que corresponde analogamente com aquilo que está sendo representado” (Moreira, 1996, p. 195). Por fim, os fatos dizem respeito a realidades físicas muito concretas que os alunos guardam em sua memória, como as experiências pessoais, por exemplo.

O passo seguinte é analisar a influência do contexto nesses elementos mentais, isso porque Bao (1999, p. 11) parte da premissa que “o conhecimento em si é considerado o resultado das interações entre os cérebros das pessoas e o ambiente físico externo”, daí a importância de considerar os aspectos do contexto que vão interferir na construção desse conhecimento. Primeiro, é preciso considerar que os diferentes contextos vão influenciar a formação dos elementos mentais (princípios, modelos e fatos), ao fornecer as bases para as operações mentais superiores. Segundo, o contexto específico serve de gatilho (disparo) para indicar qual o conhecimento será apropriado para determinada situação. Terceiro, uma vez

formado o elemento mental, esse também apresenta características que são dependentes do contexto, isso porque quando ocorre a aplicação de um modelo mental, por exemplo, em um contexto específico, “os resultados gerados com as configurações de contexto formam uma instância de experiência e podem ser usados como exemplo em outros processos mentais” (Bao, 1999, p. 12).

Conhecidas as influências do contexto nos elementos mentais, busca-se agora realizar inferências sobre esses elementos, isso porque, conforme já salientado, não é possível medir diretamente um constructo mental dos alunos. Porém, a partir das respostas que os alunos dão nos mais variados contextos, pode-se realizar inferências sobre os modelos dos alunos, daí a importância de medições mais precisas desses modelos (Bao, 1999). Para tanto, o referido autor define três características para os modelos dos alunos:

- 1) Um modelo é uma estrutura mental produtiva. Ele pode ser aplicado diretamente em contextos físicos específicos para obter resultados; 2) Um modelo é sempre associado a um, mas apenas um domínio conceitual físico. [...] Embora os modelos para diferentes domínios de conceito possam ter operações lógicas/matemáticas semelhantes, as características contextuais devem distingui-los como modelos diferentes; 3) Um modelo é uma estrutura mental estável, ou seja, um modelo é invariante para diferentes instâncias de contexto relacionadas a um mesmo domínio conceitual físico (Bao, 1999, p. 14).

Dentro de um domínio conceitual físico específico, existe o modelo do especialista, geralmente é o modelo cientificamente aceito e, outros modelos que são incorretos ou parcialmente corretos, expressados pelos alunos. Ainda na dimensão desses últimos modelos encontra-se o modelo nulo, que se refere a “quaisquer outras ideias insignificantes (impopulares) e/ou irrelevantes que o aluno possa ter. Essas ideias geralmente resultarão em respostas sem sentido em perguntas abertas ou respostas aleatórias em perguntas de múltipla escolha” (Bao, 1999, p. 15). Ao serem submetidos a um teste, os alunos podem apresentar consistência ao responderem as questões em um único modelo (correto ou incorreto) ou podem não ter consistência em suas respostas, podendo utilizar vários modelos diferentes.

Diante das premissas expostas sobre as bases da Análise de Modelos, o passo seguinte consiste em entender o estado de modelo do aluno, que será visto a seguir.

2.2 O estado de modelo do aluno

Define-se como sendo o estado de modelo do aluno às diferentes situações em que esses alunos utilizam seus modelos. Tais estados podem ser consistentes ou não (estado de modelo misto). Para cada pergunta em um teste, relacionada a um determinado domínio conceitual em um contexto específico, o aluno apresenta uma probabilidade para acionar um modelo específico. Assim, o estado de modelo do aluno “pode ser representado por uma configuração específica de probabilidades para um aluno usar diferentes modelos físicos em contextos de resolução de problemas relacionados a um domínio de conceito físico específico” (Bao, 1999, p. 15).

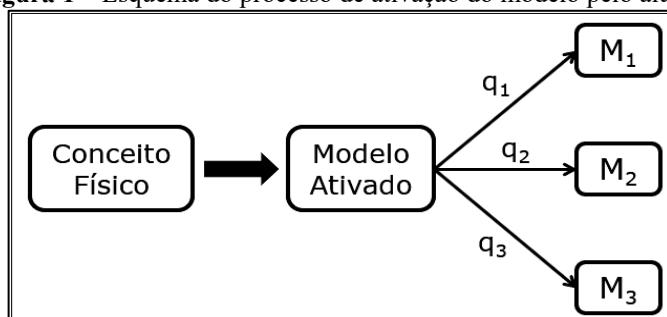
Como um modelo mental não pode ser medido diretamente, as informações obtidas são através das respostas dos alunos ao um teste, por exemplo. De acordo com Bao (1999, p. 54), “cada questão é considerada como uma instância de um contexto de física e deve desencadear nos alunos associações a certos modelos. As respostas dos alunos são consideradas como o resultado da aplicação desses modelos”. Nesse sentido, as pesquisas em ensino de Física mostram que os alunos apresentam o seguinte comportamento quando são avaliados em um determinado domínio conceitual:

- i) **um modelo dominante** (não necessariamente correto), que é usado consistentemente em várias questões relacionadas a um mesmo conceito;
- ii) **um estado de modelo misto**, onde o aluno usa vários modelos (corretos e incorretos) de forma inconsistente (questões ligeiramente diferentes sobre o mesmo conceito podem desencadear modelos diferentes);
- iii) **ou nenhum modelo**, o que geralmente leva o aluno a dar uma resposta baseada em suposições aleatórias (nenhum raciocínio lógico sério envolvido) (Bao, 1999, p. 54).

Ao aplicar um teste em uma turma, por exemplo, o conjunto de respostas dos alunos representa as várias possibilidades de utilização de seus modelos. Assim, análises simplificadas, considerando apenas as pontuações, não revelam muito sobre a real compreensão dos alunos nos conceitos em que estão sendo avaliados. Um exemplo dessas análises é a análise fatorial, em que seus resultados “fornecem informações sobre a consistência das pontuações corretas dos alunos em diferentes questões, e isso não é suficiente para extrair a estrutura real dos modelos dos alunos” (Bao, 1999, p. 56). Isso porque, tais resultados nada informam das respostas incorretas dos alunos, que são cruciais para compreender seus modelos. Para tanto, é preciso analisar a estrutura das respostas individuais dos alunos, obtendo assim informações quantificáveis dos estados do modelo do aluno.

Para prosseguir com a análise do estado dos modelos dos alunos é preciso entender que “diferentes domínios de conceitos de física podem ter diferentes conjuntos de modelos físicos associados a eles e a estrutura desses modelos também pode ser afetada pelo histórico dos alunos” (Bao, 1999, p. 58). Assim, um bom teste de múltipla escolha tem itens relacionados aos diferentes modelos que os alunos possam acionar dentro do contexto específico da questão. Nesse sentido, o FCI é um bom exemplo de teste de múltipla escolha, em que há vários grupos de conceitos em suas questões, com seus respectivos modelos possíveis. Assim, busca-se analisar probabilisticamente como os alunos acessam cada modelo (Ver Figura 1).

Figura 1 – Esquema do processo de ativação do modelo pelo aluno.



Fonte: Adaptado de Bao e Redish (2006) e Fernandes (2011).

Conforme mostrado na Figura 1, os alunos apresentam uma probabilidade (q_1 , q_2 , q_3) para acessar cada modelo. Essas probabilidades “são armazenadas em um vetor de estado do modelo, e sua estrutura pode fornecer informações importantes sobre as formas como os alunos aplicam seus modelos conceituais” (Bao; Hogg; Zollman, 2002, p. 772). Como o acionamento de um modelo depende do contexto, para conjuntos de perguntas diferentes, vão ser medidas diferentes probabilidades.

De acordo com Bao (1999), o processo como cada aluno em particular aciona mentalmente um modelo é complexo, tendo em vista sua dependência com a estrutura das questões de um teste e também com o próprio histórico individual do aluno. Portanto, este processo é caracterizado como sendo aleatório e condicionado. Isso significa que:

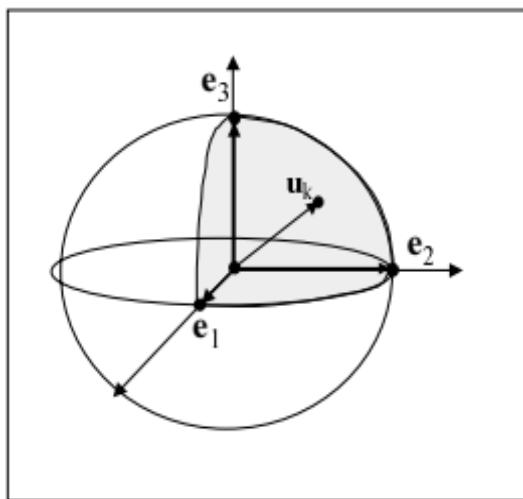
Em um domínio conceitual de física bem definido, os alunos podem criar um conjunto de modelos finitos para lidar com as várias situações de solução de problemas (ou instâncias de contexto) dentro do domínio conceitual. Que tipo de modelo deve ser desencadeado por um contexto físico específico é um processo aleatório para um observador externo; no entanto, o conjunto de modelos possíveis é limitado e conhecido (esses são definidos como modelos físicos) (Bao, 1999, p. 16).

Assim, conforme já explicitado, dentro de um domínio conceitual, geralmente existe no teste um conjunto de questões com um número finito de possíveis modelos físicos que podem ser acionados pelos alunos: correto (M_1), incorreto ou parcialmente correto (M_2) e nulo (M_3). Como cada um desses modelos difere uns dos outros, podem ser representados, matematicamente, como um conjunto de vetores unitários ortogonais:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Desta forma, define-se o espaço de modelos, como o espaço abrangido pelo conjunto desses vetores ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) em um espaço tridimensional, conforme mostrado na Figura 2.

Figura 2 – Representação 3D do espaço do modelo dos alunos.



Fonte: (Bao, 1999, p. 59).

O vetor \mathbf{u}_k representado na Figura 2, indica o vetor estado do modelo do aluno, que será tratado mais adiante neste texto. De início, tem-se que como o tamanho da amostra (alunos) interfere na estimativa do estado do modelo do aluno, um domínio conceitual geralmente apresenta um pequeno número de questões que se referem aos três modelos possíveis. Isso ocasiona, de acordo com Bao (1999), em uma incerteza considerável no vetor estimado para o modelo de um único aluno, assim, é preferível que se analise o estado de modelo da turma de estudantes, pois reduz a incerteza na medida.

Para tanto, inicialmente, procede-se com a organização das questões dentro de um único domínio conceitual, em que se determina os três modelos possíveis (M_1, M_2 e M_3) de acordo

com as alternativas de cada questão. Como as respostas dos alunos estarão vinculadas a um determinado modelo físico, podem ser representadas por um dos vetores de base (e_1, e_2, e_3). Assim, define-se r_k como sendo o vetor de resposta do modelo para o k -ésimo aluno que respondeu a um teste:

$$r_k = \begin{pmatrix} n_{1k} \\ n_{2k} \\ n_{3k} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Tem-se que k varia entre 1 a N , em que N é o número total de alunos que responderam ao teste e $n_{1k} + n_{2k} + n_{3k} = m$, em que m é o número total de questões referentes ao domínio conceitual físico que está sendo avaliado no teste. Cada n_{ik} representa o número de questões que o aluno acionou em um determinado modelo i .

A partir do vetor de resposta do aluno almeja-se a construção da matriz densidade, que trará informações fundamentais da estrutura conceitual dos alunos. Essa construção será tratada a seguir.

2.3 A Matriz Densidade

A matriz densidade irá representar as respostas dos alunos no espaço dos modelos. Essa matriz, traz “as informações estruturais sobre as respostas individuais dos alunos em relação a diferentes modelos físicos” (Bao, 1999, p. 66). Como serão utilizados três modelos, a matriz densidade será 3 x 3. Para construí-la, procede-se inicialmente com a normalização do vetor de resposta do modelo do aluno, r_k em (2), bastando dividir cada elemento deste vetor pelo número total de questões (m) relacionadas ao domínio conceitual que está sendo investigado. Assim, este vetor representará “a estimativa das probabilidades de um único aluno ser acionado em diferentes modelos físicos” (Bao, 1999, p. 66).

Como o objetivo desta análise não está centrado na análise de modelo de um aluno em particular, mas sim na turma ou em um grupo maior de alunos, é apropriado utilizar o vetor raiz quadrada das probabilidades (Fernandes, 2011) e não o vetor de probabilidade do aluno. Isso porque os produtos internos e externos desse vetor produzem informações valiosas e úteis na análise de modelos dos alunos, “o produto interno leva à restrição da soma das probabilidades, e o produto externo produz a matriz de densidade” (Bao; Redish, 2006, p. 6), dois elementos essenciais nesta análise como será demonstrado mais adiante neste texto.

Assim, toma-se a raiz quadrada dos elementos do vetor \mathbf{r}_k , gerando um novo vetor, \mathbf{u}_k , que representa a amplitude de probabilidades, denominado vetor do modelo do aluno:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ u_{3k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{n_{1k}} \\ \sqrt{n_{2k}} \\ \sqrt{n_{3k}} \end{pmatrix} = |\mathbf{u}_k\rangle \quad (3)$$

Conforme pode ser observado em (3), será utilizada a notação de Dirac para representar o vetor \mathbf{u}_k , como sendo o “ket” $|\mathbf{u}_k\rangle$.

Analisamos primeiramente o produto interno do vetor \mathbf{u}_k . É possível observar que o resultado deste produto é dado por:

$$\langle \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_k \rangle = 1$$

Como o vetor \mathbf{u}_k representa a amplitude de probabilidades do k -ésimo aluno, seu valor total é igual a 1, representando a soma das probabilidades na utilização dos modelos, algo obtido naturalmente pelo produto interno.

O produto externo do vetor \mathbf{u}_k vai gerar uma matriz, denominada matriz densidade do modelo, que para o k -ésimo aluno é dada por:

$$\mathbf{D}_k = |\mathbf{u}_k\rangle \langle \mathbf{u}_k| = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} n_{1k} & \sqrt{n_{1k}n_{2k}} & \sqrt{n_{1k}n_{3k}} \\ \sqrt{n_{2k}n_{1k}} & n_{2k} & \sqrt{n_{2k}n_{3k}} \\ \sqrt{n_{3k}n_{1k}} & \sqrt{n_{3k}n_{2k}} & n_{3k} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Todos os elementos da matriz densidade são positivos, além disso, trata-se de uma matriz simétrica, ou seja, $\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_k^T$ (Anton; Rorres, 2012). Cada elemento da matriz \mathbf{D}_k pode ser representado por $\rho_{\eta\mu}^k$, que representa a probabilidade de um aluno k gerar o tipo de resposta μ estando o aluno no estado η de modelo físico, em que é satisfeita a seguinte relação $\rho_{\eta\mu}^k = \rho_{\mu\eta}^k$ e \mathbf{D}_k pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \rho_{11}^k & \rho_{12}^k & \rho_{13}^k \\ \rho_{21}^k & \rho_{22}^k & \rho_{23}^k \\ \rho_{31}^k & \rho_{32}^k & \rho_{33}^k \end{bmatrix} \quad (5)$$

Com as informações extraídas da matriz densidade, algumas situações podem ocorrer:

- i) A maioria dos alunos de uma turma tem o mesmo modelo, não necessariamente correto, e são consistentes em usá-lo; ii) A população da turma utiliza vários modelos diferentes, mas cada aluno utiliza apenas um modelo de forma consistente; iii) Cada aluno da turma pode ter vários modelos e usá-los de forma inconsistente; ou seja, os alunos individuais têm estados de modelo mistos (Bao; Redish, 2006, p. 9).

Nota-se que muitas informações podem ser obtidas com a matriz apresentada em (4) ou (5), uma delas diz respeito aos valores de sua diagonal principal, esses representam as “probabilidades com que cada modelo está sendo utilizado pelo grupo de estudantes como um todo” (Fernandes, 2011, p. 188). Os valores fora da diagonal, referem-se a forma como os alunos utilizam os modelos misturados, sem consistência em apenas um modelo em específico.

Apesar da matriz densidade oferecer mais informações sobre a estrutura das respostas do aluno em relação a alguns modelos físicos, de acordo com Bao (1999), é preferível construir a matriz densidade para a turma inteira (ou grupo de alunos). Isso porque o vetor de modelo para um único aluno, \mathbf{u}_k , traz consigo uma incerteza considerável, porém, tal incerteza é muito menor quando é considerada a turma inteira. Esta nova matriz será mostrada a seguir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{D}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\mathbf{u}_k\rangle\langle\mathbf{u}_k| = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Em que:

$$\rho_{\eta\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_{\eta\mu}^k$$

A matriz \mathbf{D} em (6) é chamada de matriz densidade da turma de estudantes. Nesta matriz, observa-se que cada elemento da diagonal principal representa o “número de respostas baseadas no modelo do aluno (em porcentagem) correspondentes a cada um dos modelos físicos” (Bao, 1999, p. 68), ou seja, a probabilidade dos alunos que compõem a turma (ou um grupo específico) acionarem cada um dos três possíveis modelos (M_1 , M_2 e M_3). Assim, verifica-se que o traço dessa matriz é igual a 1. Em relação aos demais elementos da matriz, esses indicam uma mistura de alunos que utilizaram os diferentes modelos em suas respostas, representando também a inconsistência no uso dos modelos pelos alunos. Uma informação importante sobre a matriz densidade é que:

Se a maioria dos alunos for a favor de um modelo claro e consistente, um dos elementos diagonais será muito maior do que os outros elementos diagonais e os fora da diagonal serão quase 0. Se os alunos individuais ainda forem consistentes no uso de seus modelos, mas alunos diferentes podem ter tipos diferentes de modelos, os elementos fora da diagonal ainda serão zero. Se um número significativo de alunos for inconsistente no uso de seus modelos, os elementos fora da diagonal de D serão comparativamente grandes (Bao, 1999, p. 70).

O referido autor fornece ainda uma maneira de calcular essa inconsistência dos alunos em utilizar seus modelos, refletindo os valores dos elementos fora da diagonal principal na matriz densidade. Assim a mistura nos modelos é dada por:

$$\gamma_{\eta\mu} = \frac{\rho_{\eta\mu}}{\sqrt{\rho_{\eta\eta}\rho_{\mu\mu}}} \quad (7)$$

Em (7) temos que $\gamma_{\eta\mu}$ varia entre 0 e 1. Assim, essa grandeza “nos dar uma estimativa sobre se os alunos em uma turma estão apresentando estados de modelo mistos semelhantes ou se podem ter diferentes tipos de estados de modelo (consistentes e mistos)” (Bao, 1999, p. 81). Essa estimativa também estará refletida nos autovalores (como será visto mais adiante), porém, com $\gamma_{\eta\mu}$ faz-se de forma direta esse comparativo de mistura entre dois modelos físicos de interesse.

Por fim, a partir da construção da matriz densidade da turma, é possível encontrar os autovalores com seus respectivos autovetores (seção a seguir), que vão trazer mais informações sobre os estados do modelo da turma de alunos.

2.4 Autovalores e Autovetores de D

Neste ensaio teórico será utilizada a maneira seguida por Bao (1999) para encontrar os autovalores da matriz densidade da turma, D , porém, para outros formalismos o leitor poderá consultar outras fontes, como Anton e Rorres (2012), por exemplo. Nesse sentido, tem-se que todos os elementos de D são positivos, assim, seus autovalores serão números reais não negativos, denotados por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, pois D é uma matriz 3×3 .

Como toda matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável (Anton; Rorres, 2012) é válida a seguinte relação $V^T D V = \Lambda J$, que pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} = [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Em (8) temos que \mathbf{V} é a matriz coluna dos autovetores v_μ associados aos autovalores λ_μ . Como cada v_μ é definido de forma similar a \mathbf{u}_k , então trazem uma contribuição v_μ^2 para o estado do modelo físico do aluno, em que os autovalores representam um peso de v_μ (Bao, 1999). Nesse percurso, a partir da decomposição espectral em (8), \mathbf{D} pode ser representada por:

$$\mathbf{D} = \sum_{\mu=1}^3 \lambda_\mu |\mathbf{v}_\mu\rangle\langle\mathbf{v}_\mu| \quad (9)$$

Nesse percurso, verifica-se também o nível de concordância entre o vetor do modelo do aluno, \mathbf{u}_k e o autovetor v_μ , que é indicada pelo produto interno entre esses vetores, dado por:

$$a_{\mu k} = \langle \mathbf{u}_k | \mathbf{v}_\mu \rangle = \langle \mathbf{v}_\mu | \mathbf{u}_k \rangle \quad (10)$$

Essa concordância (10) varia entre 0 (nenhuma concordância) e 1 (concordância total). Quanto maior for, mais semelhantes entre si são os alunos de uma turma nos usos de seus modelos.

Com algumas manipulações algébricas, fazendo o uso da equação (10) em (6) e em (9), chega-se na seguinte relação para os autovetores:

$$|\mathbf{v}_\mu\rangle = \frac{1}{\lambda_\mu \cdot N} \sum_{k=1}^N a_{\mu k} |\mathbf{u}_k\rangle \quad (11)$$

Em (11) temos que o autovetor v_μ , “é uma média ponderada de todos os vetores individuais do modelo de aluno com pesos iguais aos acordos entre o autovetor e os vetores individuais do modelo de aluno” (Bao, 1999, p. 72). Assim, é preferível que se use os autovetores para representar os estados do modelo da turma, pois eles mais se assemelham a todos os vetores do modelo individual do aluno. Em seguida, multiplicando a equação (11) por $\langle \mathbf{v}_\mu |$, temos a seguinte expressão para os autovalores:

$$\lambda_\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_{\mu k}^2 \quad (12)$$

O resultado expresso em (12) indica que o “um autovalor representa a concordância média baseada na resposta entre o autovetor correspondente e todos os vetores individuais do modelo de aluno” (Bao, 1999, p. 72). Quanto maior esse autovalor, maior é a concordância do autovetor correspondente, assim, é preferível que o autovetor a ser analisado na compreensão do estado modelo da turma, seja aquele associado ao autovalor dominante ($> 0,65$). Assim:

Os vetores do modelo de turma são a média ponderada de todos os vetores do modelo de aluno individual. Como resultado, um estado do modelo de turma contém todas as informações de assinatura de todos os estados do modelo de aluno individual com contribuições controladas pela similaridade entre eles. Portanto, a estrutura de um estado do modelo de turma frequentemente representa uma característica saliente notável incorporada em um grande número de estados do modelo de aluno individual. A prevalência de tais características é descrita pelos autovalores (Bao, 1999, p. 74).

De forma complementar, temos que esses estados do modelo de turma estão associados, tendo componentes em todos os modelos físicos representados pelos vetores de base (e_1, e_2, e_3). Assim, conforme discutido anteriormente neste ensaio, “os estados do modelo de turma representam a amplitude de probabilidade, o acordo baseado em probabilidade entre um modelo físico e um estado do modelo de turma é definido como o quadrado do produto escalar entre os dois vetores do modelo” (Bao, 1999, p. 75):

$$\langle v_\mu | e_\eta \rangle^2 = v_{\eta\mu}^2 \quad (13)$$

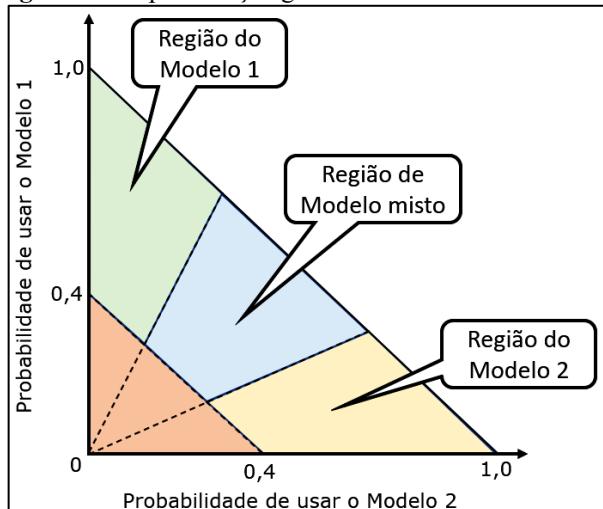
Em (13) temos que quanto maior o valor obtido, maior será a concordância com os modelos físicos em análise. Assim, para uma compreensão mais completa dos estados dos modelos dos alunos, é preciso considerar tanto os autovalores quanto seus respectivos autovetores. A seguir, serão mostradas formas de representação desses estados.

2.5 Representação dos estados do modelo do aluno

Um último elemento da análise aqui proposta diz respeito a representação gráfica dos modelos. Essa forma de representar facilita a visualização dos estados de modelos dos alunos, assim como sua evolução após um processo instrucional, por exemplo. É verificado que nas mais variadas situações, os alunos têm dois modelos que aparecem de forma predominante: o modelo correto (M_1) e outro associado a equívocos/concepções mais comuns (M_2). O modelo

nulo (M_3) aparece com pouca probabilidade de ocorrência, por isso que a abordagem da representação gráfica reside na comparação entre M_1 e M_2 (Bao; Redish, 2006). Os autores então sugerem a construção do gráfico mostrado a seguir (Figura 3):

Figura 3 – Representação gráfica dos modelos dos alunos.



Fonte: Adaptado de Bao e Redish (2006).

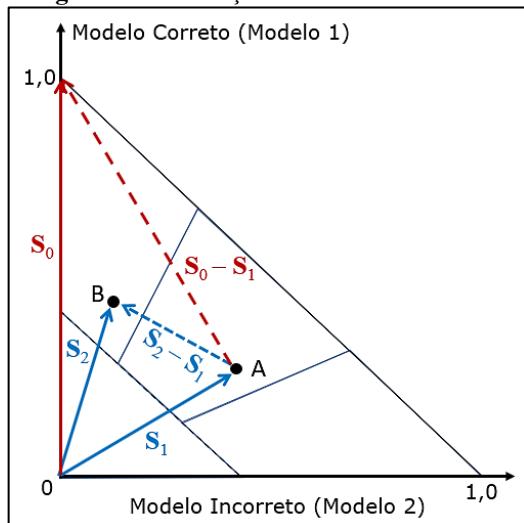
Conforme pode ser observado na Figura 3, o gráfico dos modelos dos alunos delimita algumas regiões de interesse para análise. Um ponto neste gráfico é gerado pelo par ordenado da probabilidade do aluno usar o Modelo 1 ($\rho_{11} = \lambda_\mu v_{1\mu}^2$) com a probabilidade de usar o Modelo 2 ($\rho_{22} = \lambda_\mu v_{2\mu}^2$). Tais valores são oriundos do autovetor associado ao autovalor dominante, isto é, com maior valor. Assim, um ponto na região do Modelo 1 ou 2, por exemplo, “sugere que estatisticamente os alunos da turma têm estados de modelo semelhantes que têm um componente dominante no modelo 1 (ou modelo 2)” (Bao; Redish, 2006, p. 10). A mesma interpretação é válida caso o ponto esteja na região de modelo misto. O gráfico mostra ainda uma região secundária (em laranja) que apresenta uma probabilidade inferior a 0,4, indicando o estado do modelo com pequenos autovalores, são características pouco comuns das concepções dos alunos.

Com a análise gráfica, além das análises dos autovetores primários (aqueles associados ao maior autovalor), é possível compreender com maior precisão a forma como os alunos utilizam seus modelos mentais. Pode-se ainda, em uma proposta que avalie tais modelos antes e após uma intervenção, verificar deslocamentos vetoriais no gráfico da Figura 3, possibilitando assim, que seja observada a evolução na utilização do modelo pela turma como um todo. Por fim, destaca-se na análise aqui explicitada o fato que:

Uma vantagem desta representação de análise de modelo sobre a representação baseada em pontuação é que ela mostra mais detalhes do status de desenvolvimento conceitual do aluno. [...]Portanto, a utilização de uma medição baseada em pontuações não nos permitiria distinguir entre os diferentes padrões de desenvolvimento conceptual indicados pela análise baseada em modelos (Bao; Hogg; Zollman, 2002, p. 774).

A representação gráfica permite ainda, dentro da Análise de Modelos, calcular a melhoria do modelo físico (\mathcal{M}) dos alunos quando esses são avaliados antes e após a instrução. Para tanto, observe o gráfico da figura a seguir.

Figura 4 – Mudanças de estados do modelo.



Fonte: Adaptado de Bao (1999).

Temos que os vetores S_1 e S_2 (em azul) representam os estados inicial e final do modelo do aluno (pontos A e B, respectivamente), em que a diferença desses dois vetores ($S_1 - S_2$) representa a mudança real ocorrida no modelo do aluno. O vetor S_0 (em vermelho) indica o estado mais favorável (Modelo 1) e sua diferença ($S_0 - S_1$) por S_1 representa o melhor deslocamento possível para esse estado mais favorável. Assim, a melhoria do modelo físico (\mathcal{M}) é calculado como:

$$M = \frac{(S_0 - S_1) \cdot (S_2 - S_1)}{|(S_0 - S_1)|^2} \quad (14)$$

Em (14) temos que \mathcal{M} varia de acordo com o intervalo $[-\infty, 1]$, em que sendo negativo indica um deslocamento para o modelo incorreto (Modelo 2) e quanto mais próximo de 1, um deslocamento para o modelo correto (Modelo 1).

O passo seguinte é apresentar as possibilidades de aplicação da Análise de Modelos para a pesquisa quantitativa em ensino. Isso será feito na seção a seguir, que trará dados de pesquisas recentes na área de ensino de Física que fizeram uso dessa análise e como empregaram os aspectos teóricos da mesma, discutidos anteriormente.

3 APLICAÇÕES DA ANÁLISE DE MODELOS NA PESQUISA EM ENSINO

O que se almeja com a Análise de Modelos, é obter uma compreensão mais profunda sobre como os alunos utilizam seus modelos diante de uma situação física (questões em um teste, por exemplo). Algo que é compreendido superficialmente com análises que se baseiam apenas nas pontuações dos alunos (Bao, 1999). Assim, o ponto de partida para aplicação dessa análise reside em determinar um bloco de questões que abrangem um domínio conceitual físico específico. A título de exemplo, imagine um determinado domínio conceitual com cinco questões em um teste de múltipla escolha, conforme quadro a seguir.

Quadro 1 – Associação entre os modelos físicos e as alternativas das questões.

Questões	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
1	a	b, c	d, e
2	e, b	a, c	d
3	d	a, b, c	e
4	c	b, e	a, d
5	a, d	b, c	e

Fonte: Elaboração própria.

Pode ser observado no Quadro 1 a distribuição das alternativas das questões de acordo com seu respectivo modelo físico. Nesse exemplo, o Modelo 1 se refere ao cientificamente aceito, ou seja, ao modelo correto. O Modelo 2, representa modelos incorretos ou parcialmente corretos, utilizados pelos alunos. Por fim, o Modelo 3 é o modelo nulo, relacionado às escolhas aleatórias ou pouco prováveis dos alunos. É importante salientar que não precisa existir uma relação unívoca entre as alternativas e o modelo, é possível que em um teste de múltipla escolha, mais de uma alternativa esteja associada a um determinado modelo (Bao, 1999; Bao; Redish, 2006; Tongchai *et al.*, 2011).

O que foi explicitado no Quadro 1 é condição primordial quando se pretende fazer da Análise de Modelos, tendo em vista que “estudos qualitativos das concepções ingênuas dos alunos e a incorporação de resultados em distratores de itens são um precursor necessário para

a análise do modelo” (Ding; Beichner, 2009, p. 12). Nesse sentido, o FCI, assim como outros testes padronizados, já foi construído tendo por base pesquisas qualitativas sobre as concepções dos alunos, assim, seus distratores apresentam considerável relação com os conhecimentos equivocados dos alunos (Hestenes; Wells; Swackhamer, 1992).

O passo seguinte consiste em contabilizar, para cada aluno, o número de questões associadas a cada modelo físico (M_1 , M_2 e M_3), o que permite obter o vetor de resposta do modelo, r_k , para cada aluno, que permitirá a construção do vetor do modelo do aluno, u_k , a ser utilizado na construção da matriz densidade. Essa matriz retém “as informações detalhadas sobre as estruturas individuais do modelo mental do aluno” (Bao, 1999, p. 92). Assim, para uma turma ou grupo com N alunos, é preferível utilizar a matriz densidade que apenas o vetor u_k . O trabalho de Tongchai *et al.* (2011) apresenta exemplos desse tipo de matriz (Figura 5).

Figura 5 – Matrizes de densidade média de turma.

1stFund (n = 123)	SydHigh (n = 54)	ThaiHigh (n = 270)	1stReg (n = 287)	2ndReg (n = 48)	1stAdv (n = 69)	2ndAdv (n = 51)
0.39 0.12 0.11	0.65 0.02 0.06	0.50 0.12 0.15	0.65 0.05 0.06	0.71 0.08 0.04	0.83 0.01 0.02	0.95 0.01 0.03
0.12 0.43 0.10	0.02 0.26 0.03	0.12 0.27 0.09	0.05 0.25 0.04	0.08 0.22 0.04	0.01 0.14 0.00	0.01 0.01 0.00
0.11 0.10 0.18	0.06 0.03 0.09	0.15 0.09 0.24	0.06 0.04 0.10	0.04 0.04 0.08	0.02 0.00 0.03	0.03 0.00 0.05

Fonte: Adaptado de Tongchai *et al.* (2011, p. 7).

A Figura 5 mostra uma tabela com sete matrizes densidades de acordo com cada grupo analisado (1stFund, SydHigh, ThaiHigh, 1stReg, 2ndReg, 1stAdv, 2ndAdv) com seus respectivos números de integrantes, que foram alunos da Austrália e Tailândia. Esses grupos foram classificados de acordo com o tempo e tipo de estudos que tiveram em Física, desde o Ensino Fundamental (1stFund) ao segundo ano da Graduação (2ndAdv). Assim, é perceptível que os alunos não são consistentes em suas respostas, principalmente nos grupos menos avançados (1stFund, SydHigh). Essa consistência melhora nos grupos mais avançados (1stAdv, 2ndAdv). Tais informações são facilmente perceptíveis com a análise da matriz densidade de cada grupo, ao observamos seus elementos diagonais e não-diagonais (Tongchai *et al.*, 2011).

Os referidos autores não verificaram a evolução nos modelos dos alunos com aplicação de pré-teste e pós-teste, mas em como eram esses modelos com tempos distintos de estudos em Física. Algo semelhante, porém em âmbito nacional, foi realizado na tese de Fernandes (2011), que avaliou a compreensão conceitual dos alunos em diferentes séries do Ensino Médio.

Assim como Tongchai *et al.* (2011), a pesquisa de Fernandes (2011) revelou que os alunos do 3º ano, ou seja, com mais tempo de contato com a Física, apresentaram maior consistência na utilização de seus modelos, assim como maior proximidade com o modele

cientificamente correto. Ainda fazendo uso da matriz densidade, a referida autora analisou as inconsistências com a equação (7), observando que os alunos pertencentes ao 1º ano do Ensino Médio são mais inconsistentes na utilização de seus modelos, além do fato do Modelo 2 ser o que mais contribuiu para essa inconsistência.

O passo seguinte, com a matriz densidade construída, é a determinação dos autovalores e autovetores a eles associados. Para tanto, primeiramente localiza-se o autovalor dominante (maior entre os demais e que seja maior que 0,65) e depois seu respectivo autovetor. Um caso interessante de ser discutido é o da pesquisa de Ding e Beichner (2009) que para sua matriz densidade encontraram: $\lambda_{max} = 0,835$ e $V = (-0,484, -0,857, -0,177)^T$. Ocorre que, de acordo com Bao (1999) a probabilidade de utilizar um modelo em específico é dado pelo produto do autovalor com o quadrado de cada autovetor, assim os valores encontrados por Ding e Beichner (2009) foram: $\rho_{11} = 0,20$; $\rho_{22} = 0,61$; $\rho_{33} = 0,03$. Chama atenção o fato de que a soma das probabilidades é menor que 1, implicando a não formação de um conjunto completo. Isso ocorre porque não foram levadas em consideração as probabilidades relacionadas aos outros autovetores, assim, “os autovetores adicionais atuam como correções de características menos populares que não são representadas pelo estado primário” (Bao; Redish, 2006, p. 9).

Uma característica verificada quando se analisa os modelos dos alunos é que, geralmente, não ocorre uma transição direta do modelo incorreto para o correto, pois os “estados mentais de cada aluno tendem a ser mistos, especialmente quando eles estão fazendo uma transição de um estado inicial dominado por um modelo ingênuo e incorreto para um estado especializado” (Bao; Redish, 2006, p. 15). Essa transição pode ser verificada na tese de Fernandes (2011) conforme observa-se na figura a seguir.

Figura 6 – Matrizes de densidade média de turma.

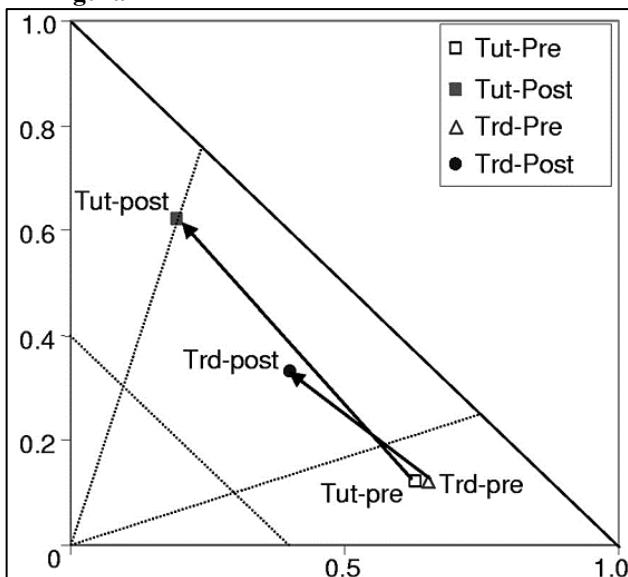
	Primeiro ano	Segundo ano	Terceiro ano
Autovalor dominante	0,85	0,82	0,80
Autovetor associado ao autovalor dominante	$\begin{bmatrix} 0,14 \\ 0,70 \\ 0,14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,34 \\ 0,50 \\ 0,14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,17 \\ 0,08 \end{bmatrix}$

Fonte: Fernandes (2011, p. 109).

A Figura 6 apresenta os autovalores dominantes e seus respectivos autovetores para cada série do Ensino Médio, referente ao domínio conceitual Movimento. Conforme pode ser observado, os três modelos são compartilhados pelos alunos de todas as séries, ocorrendo gradativamente um deslocamento para o modelo correto, à medida que os alunos avançam seus

conhecimentos em Física (Fernandes, 2011). Outra maneira de se observar essa transição na mudança dos estados dos modelos dos alunos é através da representação gráfica (Figura 7).

Figura 7 – Matrizes de densidade média de turma.



Fonte: Bao e Redish (2006, p. 12).

No gráfico da Figura 7 observamos claramente a transição do modelo incorreto, que foi o ponto de partida dos dois grupos analisados, para o modelo correto. A diferença é que o grupo que recebeu uma instrução tradicional (Trd) teve um deslocamento inferior na direção do modelo correto, em relação ao grupo que teve uma instrução com métodos ativos (Tut), que teve o estado final do modelo no limite da região de modelo misto para o correto (Bao; Redish (2006)).

Essa comparação é fundamental quando se trabalha com pré-teste e pós-teste, em que se avalia a eficácia de determinado método instrucional sobre o aprendizado dos alunos, por exemplo. Por fim, a partir dos dados do gráfico é possível quantificar com precisão, através da equação (14), a melhoria ocorrida no modelo do aluno e obter mais informações sobre o impacto de determinado método nos modelos dos alunos.

4 CONSIDERAÇÕES

Este ensaio teórico teve como objetivo apresentar e discutir as possibilidades de utilização da Análise de Modelos na pesquisa em ensino que faz uso de testes de múltipla escolha. Conforme discutido anteriormente, o primeiro passo para a aplicação dessa análise

consiste na categorização e classificação de um conjunto de questões pertencentes a um domínio conceitual específico a ser avaliado. Com base nas respostas quantitativas dos estudantes, é possível construir o vetor estado do modelo do aluno, u_k , o qual será utilizado na elaboração da matriz densidade da turma (D). A partir dessa matriz, determinam-se seus autovalores e autovetores, que fornecem informações adicionais sobre os estados dos modelos mentais dos estudantes. Nesse processo, identifica-se o autovalor dominante (superior a 0,65) e o autovetor correspondente. Com esses elementos, torna-se possível representar graficamente os estados dos modelos dos alunos, visualizando por meio de vetores, a aproximação em relação ao modelo cientificamente aceito. Essa dinâmica pode, ainda, ser quantificada por meio do cálculo da melhoria do modelo, conforme discutido nas seções anteriores.

Apesar de seu potencial analítico, a Análise de Modelos apresenta algumas limitações importantes que devem ser consideradas em sua aplicação. Primeiramente, sua eficácia depende da construção criteriosa de instrumentos avaliativos, com alternativas de resposta que representem adequadamente os modelos mentais previamente identificados em estudos qualitativos. Além disso, apresenta elevada incerteza na análise de respostas individuais, tornando a ferramenta mais adequada para investigações em nível de grupo do que para diagnósticos individuais. Nesse sentido, embora seja uma ferramenta promissora para a investigação em larga escala das concepções dos alunos, sua aplicação requer cuidados metodológicos rigorosos e complementação com abordagens qualitativas.

Assim, espera-se que este ensaio traga contribuições à pesquisa quantitativa em ensino, aos pesquisadores que trabalham com testes de múltipla escolha e buscam se aprofundar mais na compreensão dos modelos mentais dos alunos, assim como na verificação da eficácia de métodos instrucionais distintos. De forma complementar, espera-se contribuir também com a literatura nacional no uso desta análise, diante da lacuna identificada nas pesquisas. Por fim, que pesquisas futuras possam fazer uso desta ferramenta analítica, inclusive quando se pretende avaliar o impacto de determinado método de ensino nos modelos mentais dos alunos.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10^a Ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- BAO, L. Dynamics of student modeling: the theory, algorithms and application to Quantum Mechanics. **Dissertation** University of Maryland, 1999.

BAO L.; REDISH, E. F. Model analysis: Representing and assessing the dynamics of student learning. **Physical Review Special Topics – Physics Education research.** v. 2, p. 1-16, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.2.010103>.

BAO, L.; REDISH, E. F. Concentration analysis: A quantitative assessment of student states. **American Journal of Physics**, v. 69, S45–S53, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.1371253>.

BAO, L.; HOGG, K.; ZOLLMAN, D. Model analysis of fine structures of student models: An example with Newton's third law. **American Journal of Physics**, v. 70, n. 7, p. 766–778, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.1484152>.

CARVALHO, H. C.; MAFRA, J. R. e S.; GHEDIN, E. L. Formação inicial de professores: cinco aprendizagens docentes essenciais. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 12, p. e24046, 2024. DOI: <https://doi.org/10.26571/reamec.v12.16947>.

CHAMPAGNE, A. B.; KLOPFER, L. E.; ANDERSON, J. H. Factors influencing the learning of classical Mechanics. **American Journal of Physics**, v. 48, n. 12, p. 1074–1079, 1980. DOI: <http://dx.doi.org/10.1119/1.12290>.

DING, L.; BEICHNER, R. Approaches to data analysis of multiple-choice questions. **Physical Review Physics Education Research**, v. 5, n. 2, 020103, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.5.020103>.

FERNANDES, S. A. **Um estudo sobre a consistência de modelos mentais sobre mecânica de estudantes de ensino médio**. 2011. 212 f. (Tese de Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais - MG, 2011.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 2. reimpr. 6. ed. – São Paulo: Atlas, 2017.

HREPIC, Z.; ZOLLMAN, D. A.; REBELLO, N. S. Identifying students' mental models of sound propagation: The role of conceptual blending in understanding conceptual change. **Physical Review Physics Education Research**, v. 6, n. 2, 020114, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.6.020114>.

HESTENES, D.; WELLS, M.; SWACKHAMER, G. Force concept inventory. **The Physics Teacher**, v. 30, p. 141-158, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.2343497>.

MARTÍN-BLAS, T.; SEIDEL, L.; SERRANO-FERNÁNDEZ, A. Enhancing Force Concept Inventory diagnostics to identify dominant misconceptions in first-year engineering physics. **European Journal of Engineering Education**, v. 35, n. 6, p. 597–606, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1080/03043797.2010.497552>.

McCLOSKEY, M.; CARAMAZZA, A.; GREEN, B. Curvilinear Motion in the absence of external forces: Naive beliefs about the motion of objects. **Science**, v. 210, n. 4474, p. 1139-1141, 1980. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.210.4474.1139>.

McCLOSKEY, M.; WASHBURN, A.; FELCH, L. Intuitive physics: The straight-down belief

and its origin. **Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition**, v. 9, n. 4, p. 636–649, 1983. DOI: <https://doi.org/10.1037/0278-7393.9.4.636>.

MOREIRA, M. A. Modelos Mentais. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 1, n. 3, p. 193-232, 1996.

MORO, J. de B.; ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas como metodologia de ensino: uma aproximação a partir do filme “nenhum a menos”. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 12, p. e24072, 2024. DOI: <https://doi.org/10.26571/reamec.v12.17322>.

TONGCHAI, A. *et al.* Consistency of students’ conceptions of wave propagation: Findings from a conceptual survey in mechanical waves. **Physical Review Physics Education Research**, v. 7, n. 2, 020101, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.7.020101>.

APÊNDICE 1 – INFORMAÇÕES SOBRE O MANUSCRITO

AGRADECIMENTOS

Não se aplica.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA

Resumo/Abstract/Resumen: José Uibson e Fernando Frei

Introdução: José Uibson e Fernando Frei

Referencial teórico: José Uibson

Análise de dados: José Uibson

Discussão dos resultados: José Uibson

Conclusão e considerações finais: José Uibson e Fernando Frei

Referências: José Uibson

Revisão do manuscrito: Fernando Frei

Aprovação da versão final publicada: José Uibson e Fernando Frei

CONFLITOS DE INTERESSE

Os autores declararam não haver nenhum conflito de interesse de ordem pessoal, comercial, acadêmica, política e financeira referente a este manuscrito.

DISPONIBILIDADE DE DADOS DE PESQUISA

Os dados desta pesquisa não foram publicados em Repositório de Dados, mas os autores se comprometem a socializá-los caso o leitor tenha interesse, mantendo o comprometimento com o compromisso assumido com o comitê de ética.

PREPRINT

Não publicado.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

COMO CITAR - ABNT

UIBSON, José; FREI, Fernando. Uso da Análise de Modelos na pesquisa quantitativa em ensino. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 13, e25053, jan./dez., 2025. <https://doi.org/10.26571/reamec.v13.18821>

COMO CITAR - APA

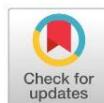
Uibson, J. & Frei, F. (2025). Uso da Análise de Modelos na pesquisa quantitativa em ensino. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, 13, e25053. <https://doi.org/10.26571/reamec.v13.18821>

DIREITOS AUTORAIS

Os direitos autorais são mantidos pelos autores, os quais concedem à Revista REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática - os direitos exclusivos de primeira publicação. Os autores não serão remunerados pela publicação de trabalhos neste periódico. Os autores têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicado neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico. Os editores da Revista têm o direito de realizar ajustes textuais e de adequação às normas da publicação.

POLÍTICA DE RETRATAÇÃO - CROSSMARK/CROSSREF

Os autores e os editores assumem a responsabilidade e o compromisso com os termos da Política de Retratação da Revista REAMEC. Esta política é registrada na Crossref com o DOI: <https://doi.org/10.26571/reamec.retratacao>



OPEN ACCESS

Este manuscrito é de acesso aberto ([Open Access](#)) e sem cobrança de taxas de submissão ou processamento de artigos dos autores (*Article Processing Charges – APCs*). O acesso aberto é um amplo movimento internacional que busca conceder acesso online gratuito e aberto a informações acadêmicas, como publicações e dados. Uma publicação é definida como 'acesso aberto' quando não existem barreiras financeiras, legais ou técnicas para acessá-la - ou seja, quando qualquer pessoa pode ler, baixar, copiar, distribuir, imprimir, pesquisar ou usá-la na educação ou de qualquer outra forma dentro dos acordos legais.



LICENÇA DE USO

Licenciado sob a Licença Creative Commons [Attribution-NonCommercial 4.0 International \(CC BY-NC 4.0\)](#). Esta licença permite compartilhar, copiar, redistribuir o manuscrito em qualquer meio ou formato. Além disso, permite adaptar, remixar, transformar e construir sobre o material, desde que seja atribuído o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico.



VERIFICAÇÃO DE SIMILARIDADE

Este manuscrito foi submetido a uma verificação de similaridade utilizando o software de detecção de texto [iThenticate](#) da Turnitin, através do serviço [Similarity Check](#) da Crossref.



PUBLISHER

Universidade Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicação no [Portal de Periódicos UFMT](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da referida universidade.



EDITOR

Dailson Evangelista Costa

AVALIADORES

Avaliação Aberta - identificação dos avaliadores no manuscrito: Valorizamos a contribuição dos avaliadores e agora sugerimos que seus nomes sejam publicados nos artigos revisados. Isso reconhece seu trabalho e promove a transparência no processo de revisão por pares.

Nome do Avaliador 1 (ORCID; LATTES)

Nome do Avaliador 2 (ORCID; LATTES)

Obs.: Os nomes dos avaliadores serão divulgados caso todos autorizem, considerando a abertura da avaliação por pares que é inherente ao alinhamento deste periódico com o *modus operandi* de ciência aberta, tomando como base as orientações e recomendações do [Programa SciELO](#) e da [Associação Brasileira de Editores Científicos \(ABEC\)](#). Caso os avaliadores não autorizem a divulgação, o editor registrará a seguinte mensagem: “Dois pareceristas *ad hoc* avaliaram este manuscrito e não autorizaram a divulgação dos seus nomes.”

HISTÓRICO

Submetido: 10 de dezembro de 2024.

Aprovado: 26 de maio de 2025.

Publicado: 29 de dezembro de 2025.
