REAMEC
REVISTA DA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: DA AMBLYTOME À HIPÉRBOLE COM GEOGEBRA

HISTORY AND TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING: FROM THE AMBLYTOME TO THE HYPERBOLA WITH GEOGEBRA

HISTORIA Y TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: DE LA AMBLYTOME A LA HIPÉRBOLA CON GEOGEBRA

Ivonne C. Sánchez[*] Iran Abreu Mendes[**]

Maria Deusa Ferreira Silva[***]

RESUMO

Este artigo explora o desenvolvimento histórico e epistemológico dos métodos de determinação da equação da Hipérbole, desde as noções de Menêcmo com a Amblytome e as contribuições de Apolônio, até a abordagem moderna com o GeoGebra. O foco é apresentar uma trajetória que integra a História da Matemática para apoiar o ensino da Hipérbole, enfatizando conceitos de razão e proporcionalidade em geometria e seu tratamento algébrico. Utilizando o GeoGebra, destacamos a importância de visualizar e compreender as correlações geométricas e algébricas, facilitando a aprendizagem dos alunos ao apresentar a Hipérbole como lugar geométrico. Este trabalho visa fomentar novas discussões sobre a integração da História da Matemática e tecnologias digitais no ensino, promovendo uma abordagem interdisciplinar e inovadora.

Palavras-chave: Hipérbole. História da Matemática. GeoGebra.

ABSTRACT

This article explores the historical and epistemological development of methods for determining the equation of the hyperbola, from the notions of Menecmus with the Amblytome and the contributions of Apollonius, to the modern approach with GeoGebra. The focus is to present a trajectory that integrates the History of Mathematics to support the teaching of the Hyperbola, emphasizing concepts of ratio and proportionality in geometry and its algebraic treatment. Using GeoGebra, we highlight the importance of visualizing and understanding geometric and algebraic correlations, facilitating student learning by presenting the Hyperbola as a geometric place. This work aims to foster new discussions on the

[*] Mestra em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com.
[**] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (IEMCI), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa., 01, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: iamendes1@gmail.com.
[***] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora Visitante no Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (IEMCI), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa., 01, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: mariadeusa@gmail.com.

integration of the History of Mathematics and digital technologies in teaching, promoting an interdisciplinary and innovative approach.

Keywords: Hyperbola. History of Mathematics. GeoGebra.

RESUMEN

Este artículo explora el desarrollo histórico y epistemológico de los métodos de determinación de la ecuación de la Hipérbola, desde las nociones de Menéecmo con la Amblytome y las contribuciones de Apolonio, hasta el enfoque moderno con GeoGebra. El objetivo es presentar una trayectoria que integre la Historia de la Matemática para apoyar la enseñanza de la Hipérbola, enfatizando conceptos de razón y proporcionalidad en geometría y su tratamiento algebraico. Utilizando GeoGebra, destacamos la importancia de visualizar y comprender las correlaciones geométricas y algebraicas, facilitando el aprendizaje de los estudiantes al presentar la Hipérbola como lugar geométrico. Este trabajo busca fomentar nuevas discusiones sobre la integración de la Historia de la Matemática y las tecnologías digitales en la enseñanza, promoviendo un enfoque interdisciplinario e innovador.

Palabras clave: Hipérbola. Historia de la Matemática. GeoGebra.

1 CONSIDERAÇÕE INCIAIS

Este artigo é um recorte de uma tese que abordará o desenvolvimento histórico e epistemológico das seções cónicas e suas contribuições para o ensino da geometria analítica e vem sendo desenvolvida junto ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas-PPGECM, da Universidade Federal do Pará (UFPA). A pesquisa em andamento procura estabelecer princípios norteadores de uso da História para o Ensino da Matemática e tecnologias digitais, de maneira tal a propiciar a interligação envolvendo conceitos, propriedades e relações matemáticas concernentes aos métodos de obtenção das equações das Seções Cônicas, a partir de uma investigação histórica desenvolvimento histórico e epistemológico da matemática para a organização de movimentos sequenciais históricos a serem associados ao conteúdo do livro de geometria analítica contemporâneo.

Nesse cenário, as Cônicas são objetos matemáticos com aplicação em várias áreas como Matemática, Astronomia, Física, Arte, entre outras. Ao longo dos séculos, estes objetos foram sendo estudados e aprimorados por diversos matemáticos, até chegarmos ao que conhecemos hoje. O estudo destas curvas está presente no Ensino Médio, com uma abordagem fundamentada em curvas que são geradas a partir de cortes transversais em um cone, explorando diversas representações, tais como gráficos e expressões algébricas. Já no Ensino Superior se apresenta com um maior aprofundamento do tema na disciplina de Geometria Analítica, especialmente por meio da definição de lugar geométrico (Sánchez; Castillo, 2024; Sánchez; Castillo; Mendes, 2024; Sánchez; Mendes; Castillo, 2023).

Para Bordallo (2011) destacou que, nos livros didáticos do terceiro ano do Ensino Médio, as Cônicas são comumente apresentadas por meio do corte entre um plano e um cone circular reto de duas folhas. Por outro lado, Borges (2023) sinaliza que não se realiza a demonstração da equação reduzida de nenhuma das Cônicas; a equação é apenas apresentada desde a focalidade das curvas. Nesse cenário dos livros didáticos, Monteiro (2014) destaca, ainda, o predomínio do enfoque algébrico no estudo dessas curvas, em detrimento de um ensino e aprendizagem de aspectos mais intuitivos, como proposto na Geometria. Esta, por sua vez, é utilizada, em sua grande maioria, apenas como suporte introdutório para cada figura cônica abordada. Todavia, sem a demonstração algébrica para se chegar à forma da equação reduzida, o ensino e, portanto, a aprendizagem desse conteúdo fica bastante prejudicado, cabendo aos alunos apenas memorizarem equações, sem entender de onde e como surgiram.

Nesse sentido, na pesquisa em andamento, nosso objetivo é focar no desenvolvimento histórico e epistemológico das Cônicas. Contudo, para este artigo focaremos apenas na Hipérbole, ou da Amblytome à Hipérbole, especificamente na análise e caracterização da equação desta curva. Assim sendo, mostraremos abordagens que podem levar os estudantes a refletir sobre estratégias e práticas criadas ao longo da História da Matemática para explicar e compreender o estudo da Hipérbole. Aliado aos aspectos históricos-epistemológicos, faremos uso das Tecnologias Digitais, especificamente o GeoGebra, como artefato para apoiar a construção da Hipérbole, com base nas ideias e noções de Menêcmo, Apolônio e a abordagem como lugar geométrico. Especificamente, descreveremos diversos métodos para determinar a equação ao longo da história da Hipérbole, mostrando as correlações geométricas e algébricas advindas do desenvolvimento histórico e epistemológico desta curva apoiados no GeoGebra.

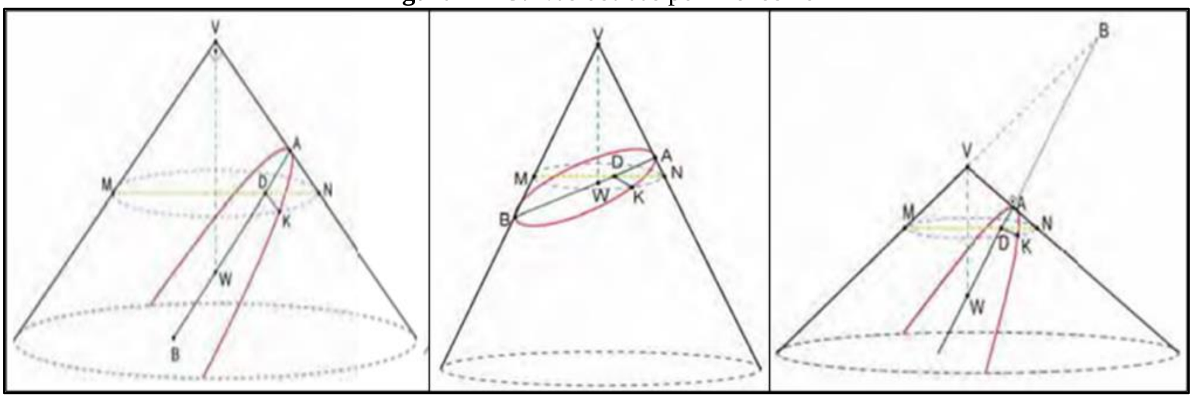
2 HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS

2.1 Um pouco de história sobre as seções cônicas

Um ponto de partida válido para começarmos a discorrer a respeito da história sobre as cônicas é o século IV a.C., quando já se buscava soluções para os três problemas clássicos da antiguidade: *a quadratura do círculo, a trisseção do ângulo e a duplicação do cubo*. Nesse sentido, vários historiadores (Collette, 1985; Boyer, 1997; Estrasa; Sá; Queiró; Costa, 2000) atribuem a origem das seções cônicas a Menêcmo[1] por meio de sua resolução do problema da duplicação do cubo. Este problema consiste em: dada a aresta de um cubo, construir com o uso da régua e compasso a aresta de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do primeiro.

Em sua busca para resolver este famoso problema, Menêcmo (380 a.C. 320 a.C.) descobriu uma família de curvas adequadas que foram chamadas de "Tríade de Menêcmo", obtidas pelo mesmo método, ou seja, de um plano que corta perpendicularmente à geratriz de três tipos de cones retos, dependendo do ângulo no vértice do cone: agudo, reto ou obtuso. Desta forma, as cônicas foram classificadas de acordo com o tipo de cone com o qual são produzidas. Assim sendo, a seção de cone de ângulo reto ou *Orthotome*, conhecida hoje como parábola, a seção de cone de ângulo agudo ou *Oxytome* é à elipse e a seção de cone de ângulo obtuso ou *Amblytome* é à hipérbole (Figura 1). É importante mencionar que, por serem considerados apenas cones de uma única folha, pôde-se observar apenas um único ramo do *Amblytome*.

Figura 1 – Curvas obtidas por Menêcmo



Fonte: Lopes (2011, p. 36)

Durante mais de 150 anos, as curvas introduzidas por Menêcmo eram conhecidas a partir da descrição da forma em que foram descobertas. Isto mudou com a publicação da obra "*As Cónicas*" de Apolónio de Perga (262 a.C. — 194 a.C.). Esta obra tem oito volumes (aproximadamente 400 proposições), na qual o geômetra faz um estudo profundo sobre o tema, abrangendo todo o conhecimento que existia na época sobre as cônicas e introduziu novos resultados, o que tornou As Cônicas o tratado mais importante sobre estas curvas até então produzido.

Apolônio fez importantes contribuições para as seções cônicas, uma delas é o tipo de

[1] Na bibliografia consultada, o nome de Menêcmo também aparece como "Menaechmus".

cone usados para gerar a curva. O geômetra mostrou sistematicamente pela primeira vez que não é necessário tomar seções perpendiculares à geratriz de um cone e que de um único cone podem ser obtidas todos os três tipos de cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano da seção. Outra contribuição do geômetra foi que substitui o cone de uma só folha por um cone duplo. Além disso, foi Apolônio quem cunho os nomes de Parábola, Elipse e Hipérbole.

Durante muito tempo as cônicas foram estudadas a partir de uma abordagem puramente geométrica, porém isso mudou com o nascimento da Geometria Analítica, que permitiu uma nova abordagem dessas curvas que se estabelece até hoje. Segundo estudiosos da história da Matemática, a Geometria Analítica nasceu num período histórico, especificamente no século XVII nos estudos dos franceses aos René Descartes (1596 - 1650) e Pierre de Fermat (1601-1665).

De um modo geral, pode-se dizer que a invenção da Geometria Analítica por Descartes consiste na extensão da Arte Analítica de Vieta à construção geométrica de soluções de equações indeterminadas, enquanto para Fermat foi o estudo dos lugares geométricos através da Arte Analítica de Vieta. Neste sentido, digamos que enquanto Descartes parte da curva correspondente a um lugar geométrico da qual deriva a equação do lugar, ou seja, resolve problemas geométricos através da construção da solução geométrica das equações, Fermat parte inversamente de uma equação algébrica da qual são derivadas as propriedades geométricas da curva correspondente (Urbaneja, 2007).

É nesta direção da geometria analítica que os estudos das cônicas continuaram até o que conhecemos hoje, ou seja, como lugares geométricos que atendem a determinadas condições pertencentes a um plano cartesiano. Nesse sentido, este articulo partirá da descoberta das cônicas por Menêcmo, do estudo de Apolônio sobre essas curvas e de um estudo geométrico das cônicas a partir de sua definição como lugar geométrico. Especificamente, descreveremos os métodos históricos para obter a equação da Hipérbole usando o GeoGebra

2.2 O GeoGebra: um meio dinâmico para aprender matemática

GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2002 como um software de Geometria Dinâmica e Álgebra no Plano. Rapidamente, seus recursos se expandiram para outras áreas da matemática, como Cálculo, Estatística e Geometria no Espaço. Desde então, o GeoGebra tornou-se um fenômeno de popularidade devido ao seu fácil acesso e dinamismo, transformando-se em uma poderosa ferramenta matemática para aprendizado e criação de

https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733 2318-6674

conhecimento. A dissertação de mestrado de Hohenwarter, intitulada "*GeoGebra Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*" (Hohenwarter, 2002), apresenta o software, sua fundamentação matemática e computacional, e sua aplicação a problemas matemáticos. Hohenwarter materializou um programa de computador que une software de Geometria Dinâmica e Álgebra Computacional, tratando objetos geométricos no plano de forma integrada e interativa.

O GeoGebra oferece duas representações para cada objeto: algébrica, com coordenadas, equações ou representações paramétricas, e geométrica, como conjunto de soluções associado. Essa conexão dinâmica bidirecional entre múltiplas representações de objetos matemáticos abre uma ampla gama de novas possibilidades para o ensino e aprendizagem da matemática. Preiner (2008) destaca várias razões para escolher o GeoGebra como recurso educacional, incluindo suas múltiplas representações que promovem a compreensão dos alunos, a conexão bidirecional entre geometria dinâmica e álgebra computacional, a criação de materiais instrucionais interativos baseados na web e uma comunidade internacional de usuários que compartilha materiais educativos.

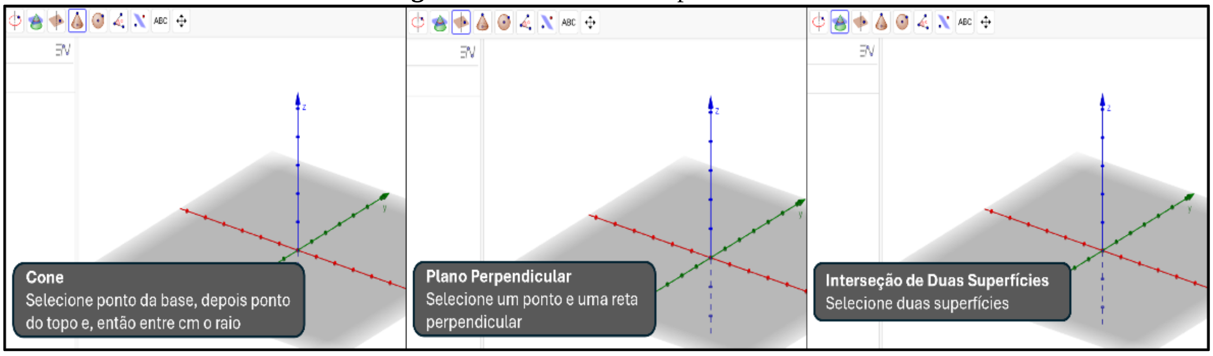
A eficácia do GeoGebra para o ensino e aprendizagem da matemática é amplamente reconhecida. Fuchs e Hohenwarter (2005) e Prieto (2016) categorizam seu uso em várias situações educacionais: como ferramenta de visualização, oferecendo uma perspectiva dinâmica de conceitos e relações matemáticas; como ferramenta de construção, permitindo a criação e manipulação de construções geométricas em 2D e 3D; como ferramenta de descoberta, favorecendo a identificação de padrões e invariantes matemáticos; e como ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático, fornecendo um ambiente amigável para o desenvolvimento de materiais dinâmicos.

Para criar atividades históricas, utilizamos o GeoGebra Clássico 6 na versão *online*, acessível em computadores, tablets e smartphones, sem a necessidade de instalação do software. Essa categorização apresentada por Prieto permite uma visão ampla de como os professores podem utilizar o GeoGebra em suas aulas com diferentes propósitos. Nossa intenção é que o GeoGebra seja utilizado em uma ou mais dessas características nas atividades históricas, promovendo uma abordagem inovadora e interativa para o ensino da Matemática.

3 A TRAJETÓRIA MATEMÁTICA DA AMBLYTOME À HIPÉRBOLE

Para obter a *Amblytome*, Menêcmo construo um cone reto que tem um ângulo obtuso no vértice e um plano perpendicular à geratriz do cone. No GeoGebra, ambos objetos geométricos podem ser construídos direitamente com as ferramentas: “Cone” e “Plano Perpendicular” disponíveis na janela de visualização 3D; a interseção desses objetos geométricos da como resultado a curva, que pode ser obtida no GeoGebra com a ferramenta “Interseção de Duas Superfícies” (Figura 2).

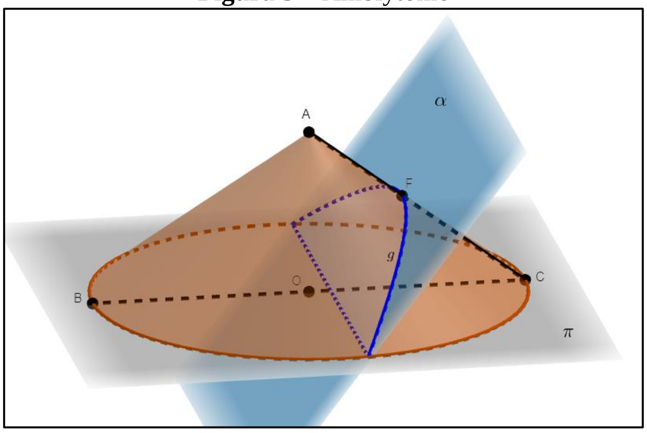
Figura 2 – Curvas obtidas por Menêcmo



Fonte: Elaborado pelos autores

Assim sendo, seja o cone reto CAB apoiado sobre o plano π que possui um ângulo obtuso no vértice A. O ponto O é o centro do cone e o ponto A é o vértice do cone. O segmento BC é o diâmetro da circunferência base do cone. O ponto F está sobre a geratriz AC e por ele trace um plano α perpendicular a AC. Da interseção do cone com o plano α obtemos a curva p, a qual Menêcmo chamou de *Amblytome* (Figura 3).

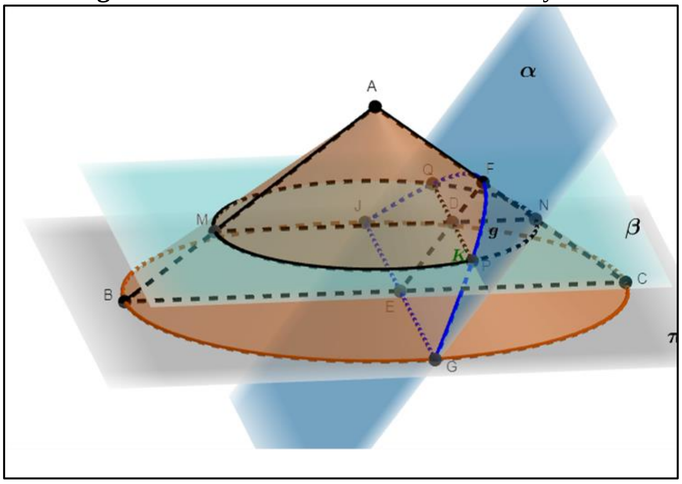
Figura 3 – Amblytome



Fonte: Elaborado pelos autores

Em seguida, temos um ponto K sobre a curva p que seja diferente de F e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π; o GeoGebra têm uma ferramenta em suas opções de caixas de ferramentas chamada “*Plano Paralelo*”. Logo, a interseção do cone com o plano β é a circunferência g. A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M, respectivamente. Temos então que o segmento MN é o diâmetro de g. Depois, a interseção entre a curva da Hipérbole e a circunferência da base do cone são os pontos J e G e a interseção da Hipérbole com a circunferência g são os pontos P e Q. Seja E o ponto de interseção entre as retas FD e BC. Por simetria os segmentos MN e PQ são perpendiculares e a interseção entre eles é o ponto D (Figura 4).

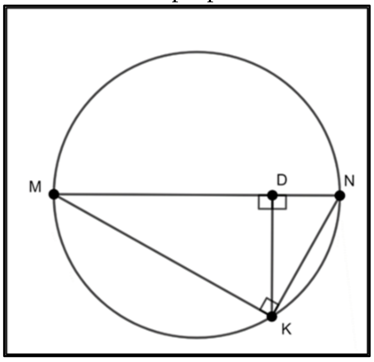
Figura 4 – Construindo elementos da Amblytome



Fonte: Elaborado pelos autores

Como MN e diametro de g, temos que o triângulo KMN inscrito na circunferencia g é retângulo, e tem o segmento MN como hipotenusa e KD é a altura relativa à hipotenusa (Figura 5).

Figura 5 – KD é a média proporcional entre DM e DN



Fonte: Elaborado pelos autores

Então, a partir da figura 5, observe que o triângulo ΔMKN é retângulo em K e o triângulo

ΔMKN é semelhante aos triângulos ΔMDK e ΔNDK. Então, os triângulos ΔMDK e ΔNDK são semelhantes, então podemos dizer que:

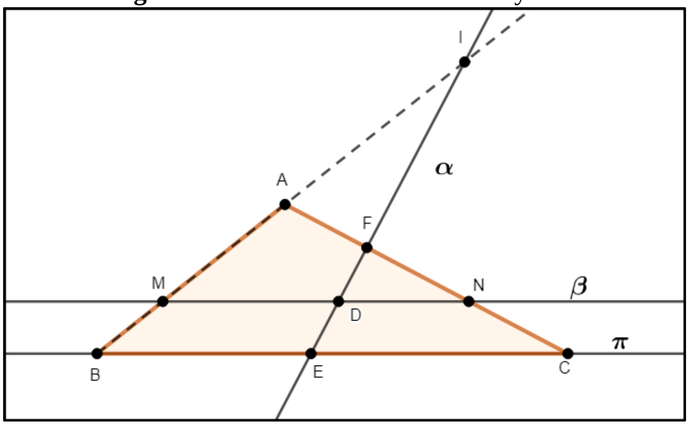
$$\frac{DM}{DK} = \frac{DK}{DN} \quad (1)$$

Desta forma, KD é a média proporcional[2] entre DM y DN, portanto, podemos escrever o seguinte:

$$KD^2 = DM.DN \quad (1.2)$$

Observe que FD e KD são segmentos perpendiculares e podem ser vistos como a abscissa e a ordenada do ponto K, respectivamente. Assim, a expressão matemática associada a Hipérbole é obtida pela relação entre KD e FD (LOPES, 2011). Para uma melhor visualização da situação se apresenta um corte transversal do cone, esta construção será representada na janela de visualização 2D do GeoGebra. Neste caso, o plano de seção α, perpendicular à geratriz AC, não é paralelo à geratriz AB, portanto as retas FD e AB não são paralelas. Logo, é necessário prolongar os segmentos AB e DE até que se intersectem no ponto I (Figura 6).

Figura 6 – Corte transversal da Amblytome



Fonte: Elaborado pelos autores

Como os segmentos MD e BE são paralelos, os triângulos ΔIMD e ΔIBE são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, já que os ângulos $\widehat{IMD}$ e $\widehat{IBE}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas e os ângulos $\widehat{IDM}$ e $\widehat{IEB}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas. Assim podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{DM}{DI} = \frac{EB}{EI} \quad \rightarrow \quad DM = \frac{DI \cdot EB}{EI} \, (2)$$

De forma análoga temos que os triângulos ΔFDN e ΔFEC também são semelhantes pelo

[2] Um segmento é a média proporcional de dois outros segmentos, quando ocupa as duas médias ou os dois extremos da mesma proporção.

https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733 2318-6674

critério ângulo-ângulo, já que os ângulos $\widehat{FDN}$ e $\widehat{FEC}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas e os ângulos $\widehat{FND}$ e $\widehat{FCE}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas. Assim podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{DN}{DF} = \frac{EC}{EF} \quad \rightarrow \quad DN = \frac{EC \cdot DF}{EF} \quad (2.1)$$

Logo, substituindo as equações (2) e (2.1) na equação (1.2) temos:

$$KD^2 = \frac{DI \cdot EB}{EI} \cdot \frac{EC \cdot DF}{EF} \quad (2.2)$$

Como $DI = DF + FI$, podemos escrever a equação (2.2) da seguinte forma:

$$KD^2 = (DF + FI) \cdot \frac{EB \cdot DF \cdot EC}{EI \cdot EF} \quad (2.3)$$

Os segmentos FI, BE, EC, EF e EJ têm sempre a mesma medida independente da escolha do ponto K sobre a curva, enquanto os segmentos KD e FD variam de comprimento em função da posição do ponto K. Isto pode ser verificado por meio do arquivo ggb[3] chamado "Hipérbole segundo Menêcmo".

Então fazendo $KD = y$ e $DF = x$, $FI = 2a$ e $\frac{BE \cdot EC}{EI \cdot EF} = k$, temos:

$$y^2 = kx(2a + x) \quad (2.4)$$

Utilizando as expressões de hoje em dia, podemos escrever a equação (2.4) da seguinte maneira, considerando $k = \frac{b^2}{a^2}$, temos:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x(2a + x) \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{2ab^2x}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} \quad (2.5)$$

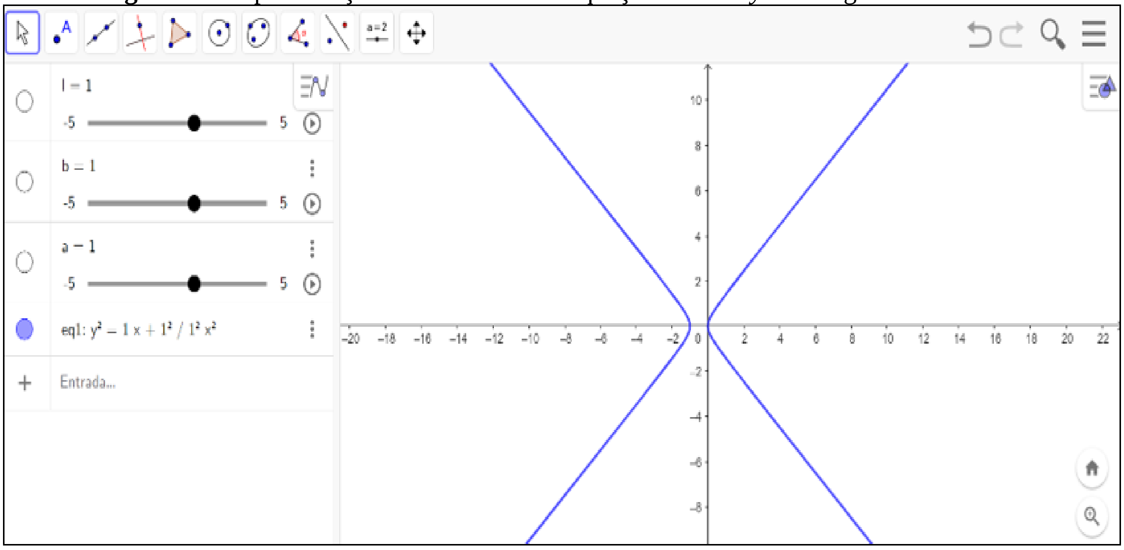
Considerando $l = \frac{2b^2}{a}$, podemos escrever o seguinte

$$y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad (2.6)$$

Ao inserir a equação (2.6) na janela de visualização 2D do GeoGebra se obteve o gráfico da Hipérbole, que para uma melhor visualização colocamos em color azul. Além disso, "l", "a" e "b" serão parâmetros que podem variar por meio do controle deslizante (Figura 7). Neste arquivo ggb, pode-se modificar os valores "l", "a" e "b" e visualizar os câmbios no gráfico da Hipérbole em tempo real. Também podem determinar-se os focos desta curva por meio de comandos na caixa de entrada.

[3] O .ggb extensão de arquivo é usado por arquivos criados usando o aplicativo GeoGebra.

Figura 7 – Representação no GeoGebra da equação da *Amblytome* segundo Menêcmo



Fonte: Elaborado pelos autores

Por sua vez, segundo Eecke (1963) Apolônio em seu tratado *As Cônicas* definiu a Hipérbole em seu primeiro livro na proposição XII da seguinte maneira:

> Se um cone for cortado por um plano que passa pelo eixo, e se for cortado por outro plano que corta a base do cone ao longo de uma linha perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo; se, além disso, o diâmetro estendido da seção encontra um dos lados do triângulo que passa pelo eixo além do vértice do cone, o quadrado de qualquer linha reta traçada a partir da seção, paralela à seção comum do plano secante e da base do cone, até o diâmetro da seção ([4]), será equivalente a uma área, aplicada ao longo de uma determinada reta, com a qual a relação da reta localizada no prolongamento do diâmetro da seção , e subtendendo o ângulo externo do triângulo ([5]), é igual à razão entre o quadrado da linha traçada do topo do cone, paralela ao diâmetro da seção, até a base do triângulo, e o retângulo delimitado sob os segmentos da base, determinado pela reta linha desenhada; área que tem como largura a linha cortada no diâmetro ([6]) por esta primeira linha ([7]), ao lado do vértice da secção, e acrescida de um número que, à semelhança do retângulo delimitado pela linha que subtende o ângulo exterior do triângulo, e pelo parâmetro, é colocado de forma semelhante ([8]). Chamamos tal seção de hipérbole ([9]) (p. 24-25, tradução nossa).

[4] Isto é, o quadrado de uma ordenada de um ponto da seção.

[5] Isto é, o triângulo axial.

[6] Isto é, a abcissa do ponto da seção.

[7] Isto é, pela ordenada.

[8] A afirmação desta proposição, uma leitura bastante penosa, equivale a dizer que, na secção cónica considerada, o quadrado da ordenada equivale a uma área retangular que, aplicada segundo o parâmetro, ou seja, tendo como parâmetro a altura, e tendo a abcissa como base, é acrescida de outra área, semelhante àquela que tem como base o eixo transversal ou diâmetro, e o parâmetro como altura. Portanto, se designarmos a ordenada por y, a abcissa por x, o eixo transversal ou diâmetro por a, e o parâmetro por p, o enunciado da proposição se traduz na relação: yy=px+pax2 que é 1 equação cartesiana da hipérbole relacionada aos eixos oblíquos, um dos quais é o diâmetro e o outro a tangente em sua extremidade.

[9] Ao criar o nome *hyperbole* que foi preservado pelos modernos na palavra “hipérbole”, Apolônio separou-se de seus antecessores, notadamente Arquimedes, que sempre designam a curva em questão pela perífrase: “seção de obtusangular cone reto”, pois consideravam que era obtido apenas pela seção plana, perpendicular a uma geratriz, de um cone reto obtusangular.

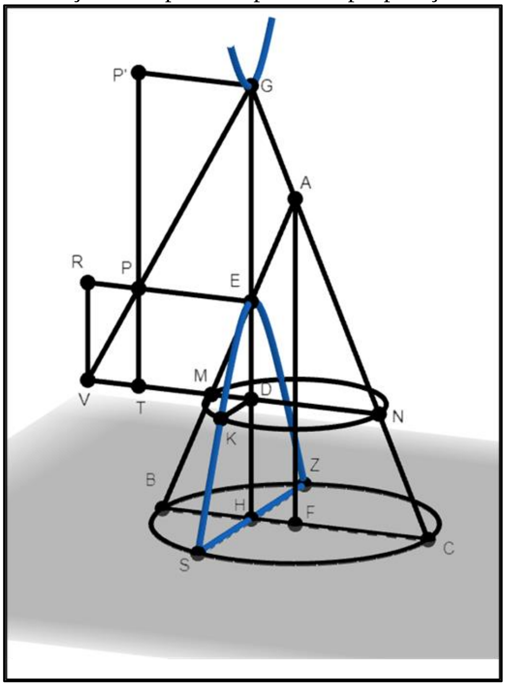
https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733 2318-6674

Segundo Eecke (1963, p. 26) e Unbaneja (2017, p.54-55) Apolônio brinda uma continuação a sua proposição XIII no intuito de explicar sua definição da Elipse:

> Seja um cone com vértice A e base a circunferência BC e vamos cortá-lo por um plano que passa pelo eixo, que produz o triângulo ABC como seção e por outro plano que corta a base do cone segundo a reta SZ perpendicular a BC do triângulo e à superfície cônica segundo a reta ZES cujo diâmetro EH, estendido, encontra um dos lados AC do triângulo ABC no ponto G além do vértice; Tracemos uma reta AF paralela ao diâmetro EH da seção que passa por A, levantemos no ponto E a perpendicular EP a EH e façamos com que a reta EG esteja para uma reta EP como o quadrado de FA para o retângulo formado por FB e FC, e por fim, desenhemos através de um ponto qualquer K do trecho paralelo KD a SZ e através do ponto D o DTV paralelo a EP, estendemos o GP até seu encontro com V com o DTV e pelos pontos P e V o PT e VR paralelos ao ED. Digo que o quadrado de KD equivale ao retângulo EP que, aplicado à reta EP, tem a largura ED e o excesso PV, que é um retângulo semelhante ao das retas EG e EP.

A solução de Apolônio para sua proposição XII do livro I é mostrada na figura 8 a seguir:

Figura 8 – Solução de Apolônio para sua proposição da Hipérbole



Fonte: Elaborado pelos autores

Logo, seja um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC, trazemos um plano que passa pelo eixo, que produzirá o triângulo axial ΔABC, logo o segmento BC é base do triângulo axial ΔABC. O segmento SZ no plano da base do cone é perpendicular BC. O segmento EH é a intercepção da seção plana com o triângulo ΔABC. E é o ponto de interseção da curva com AB e G é o ponto de interseção da curva com a prolongação de AC. Traçamos AF paralelo a EG e encontra-se com BC no ponto F. O ponto K é um ponto qualquer pertencente a curva, com o segmento KD perpendicular ao plano do triângulo axial ΔABC. Assim, KD é perpendicular a EG no ponto D. Por sua parte, o segmento MN é o diâmetro da seção circular determinada por um plano β que contêm o segmento KD, sendo este paralelo à base BC. O segmento MN intercepta o lado AB em M e AC em N, logo KD é perpendicular a MN no ponto D. EP é um segmento perpendicular a EG é EP também está contido no plano perpendicular a seção cônica que passa por E. O retângulo $EDPT$ está situado num plano perpendicular ao plano da seção cônica. V é o ponto de intercepção da prolongação do segmento DT .

Segundo Lopes (2011) o segmento EP é de extrema importância para a caracterização das curvas. Ainda segundo este autor, é um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial ΔABC e dos segmentos AE e AF da seguinte forma:

$$\frac{EP}{EG} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2} \quad (3)$$

Para obter a expressão matemática da Hipérbole, Apolônio proporcionou uma análise semelhante ao realizado por Menêcmo para obter a equação (1.2), já que, segundo as construções anteriores, sabe-se que MN é o diâmetro da circunferência que passa pelo ponto K e o segmento KD é perpendicular a MN no ponto D, logo KD é a média proporcional entre DM e DN. Então podemos escrever a mesma relação:

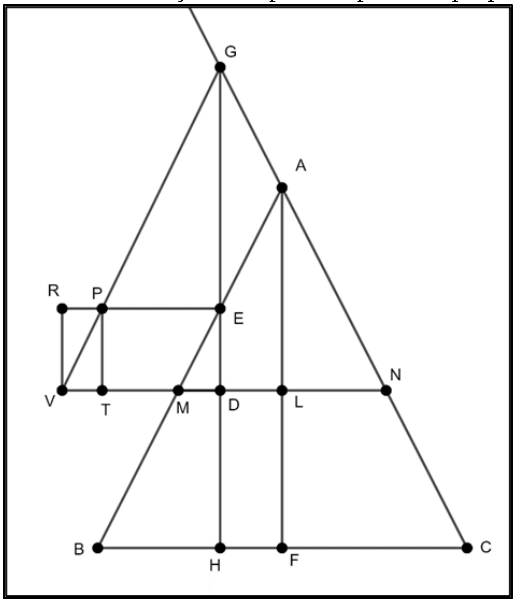
$$KD^2 = MD \cdot ND \quad (3.1)$$

Pelas construções realizadas sabemos que EH não é paralelo ao lado AC do triângulo axial ΔABC, neste caso, EH intercepta à prolongação do lado AC no ponto G. Agora, para a análise e caracterização da Hipérbole, Apolônio em sua definição relaciona o quadrado KD equivale ao retângulo que, aplicado a EP, tem a largura ED reduzida numa figura semelhante ao retângulo das retas EG e EP.

Nesse sentido, considere-se o esquema obtido a partir da figura 8 e ilustrado na figura 9.

https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733 2318-6674

Figura 9 – Corte transversal à solução de Apolônio para sua proposição da Hipérbole



Fonte: Elaborado pelos autores

Sabe-se que MN é paralelo a BC e AF é paralelo EH, então os ângulos $\widehat{ABF}$ e $\widehat{EMD}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, os ângulos $\widehat{AFB}$ e $\widehat{EHB}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, os ângulos $\widehat{EDM}$ e $\widehat{EHB}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, logo os ângulos $\widehat{EDM}$ e $\widehat{AFB}$ são congruentes. Então os triângulos ΔABF e ΔEDM são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, logo:

$$\frac{MD}{ED} = \frac{BF}{AF} \quad (3.1)$$

Da mesma maneira DN é paralelo a FC e GD é paralelo AF, os ângulos $\widehat{GND}$ e $\widehat{ACF}$ são congruentes, os ângulos $\widehat{GDN}$ e $\widehat{ALN}$ são congruentes, os ângulos $\widehat{ALN}$ e $\widehat{AFC}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, logo os ângulos $\widehat{GDN}$ e $\widehat{AFC}$ são congruentes. Então os triângulos ΔDNG e ΔACF são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, logo:

$$\frac{DN}{GD} = \frac{CF}{AF} \quad (3.2)$$

Sabe-se também por construção que EP é paralelo a DV, então os ângulos $\widehat{GEP}$ e $\widehat{GDV}$ são congruentes e os ângulos $\widehat{GPE}$ e $\widehat{GVD}$ são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, então os triângulos ΔGEP e ΔGDV são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, logo:

$$\frac{EP}{EG} = \frac{DV}{DG} \quad (3.3)$$

O segmento que passa pelos pontos colineares D, V e T é paralelo a EP e ED é paralelo a PT. Logo, os ângulos $\widehat{EPG}$ e $\widehat{DVG}$ são congruentes por serem correspondentes entre paralelas, os ângulos $\widehat{GDV}$ e $\widehat{PTV}$ são congruentes, os ângulos $\widehat{GEP}$ e $\widehat{GDV}$ são congruentes, logo os ângulos $\widehat{GEP}$ e $\widehat{PTV}$ são congruentes. Daí que os triângulos ΔGEP e ΔPTV são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, logo:

$$\frac{VT}{TP} = \frac{EP}{EG} \quad (3.4)$$

Ainda como os segmentos ED e PT tem o mesmo comprimento, já que são lados do retângulo $EDTP$, obtém-se:

$$VT = \frac{EP}{EG} \cdot ED \quad (3.5)$$

Logo, segundo Lopes (2011) a expressão correspondente a essa curva pode ser obtida da seguinte forma: Dividindo (3.1) por $ED \cdot GD$ tem-se que,

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{MD \cdot DN}{ED \cdot GD} \, (3.6)$$

Substituindo (3.1) e (3.2) em (3.6) encontra-se que:

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CF}{AF} \quad \rightarrow \quad \frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{BF \cdot CF}{AF^2} \quad (3.7)$$

Segundo Estrada *et al*. (2000) a relação da equação (3.6) mostra que a razão entre o quadrado de lado KD e o retângulo de lados ED e GD é independente do ponto K pertencente à cônica. Ainda segundo estes autores, Apolônio não toma esta propriedade como sintoma da cônica.

Então, fazendo uso de (3) e (3.3) em (3.7), obten-se:

$$KD^2 = \frac{DV \cdot ED \cdot GD}{GD} \quad \rightarrow \quad KD^2 = DV \cdot ED \quad (3.8)$$

Logo, a equação $KD^2 = DV \cdot ED$ é uma expressão geral para a curva, com DV representando valores diferentes. Agora, escrevendo DV em função da constante EP, temos que: $DV = EP + VT$. Assim pode-se escrever (3.8) da seguinte maneira

$$KD^2 = ED(EP + VT) \quad (3.9)$$

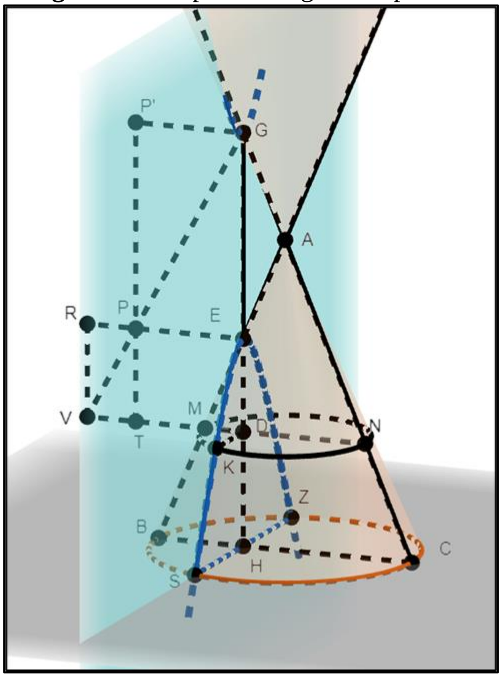
Ainda pela equação (3.5) podemos escrever (3.9) da seguinte maneira:

$$KD^2 = ED\left[EP + \left[\left(\frac{EP}{EG}\right) \cdot ED\right]\right] \text{ ou}$$

$$KD^2 = ED \cdot EP + \frac{EP}{EG} \cdot ED^2 \quad (3.10)$$

Que interpretada geometricamente é o mesmo que dizer que a área do quadrado aplicado ao segmento KD é igual a área do retângulo de lado a EP e altura ED, mais algum valor, neste caso seria $\frac{EP}{EG} \cdot ED^2$ (o retângulo de lados $\frac{EP}{EG} \cdot ED$ e ED). Assim, a curva nesse caso é uma Hipérbole, termo originário do grego *yperboli* que corresponde aplicação de áreas por excesso (Estrada et al., 2000; Lopes, 2011) (Figura 10).

Figura 10 – Hipérbole segundo Apolônio



Fonte: Elaborado pelos autores

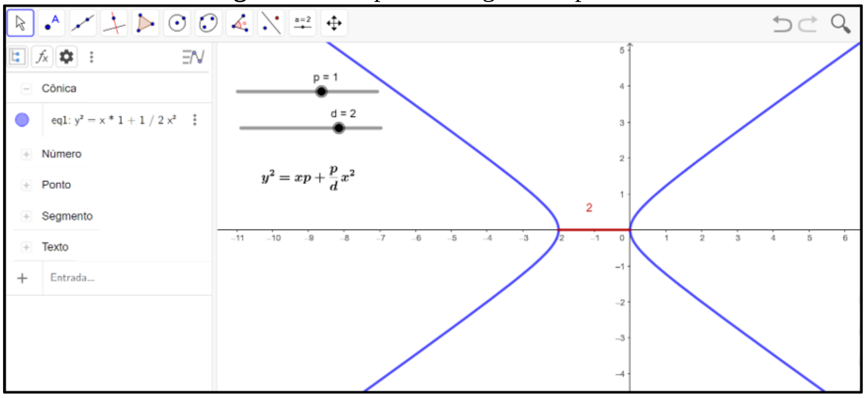
Utilizando a linguagem usado hoje em dia, considere EP um parâmetro $EP = p$ e EG diâmetro $EG = d$ que irá representar o eixo transverso da Hipérbole, considerando ainda $KD = y$ e $ED = x$, a equação (7.10) fica como (Figura 11):

$$y^2 = xp + \frac{p}{d}x^2 \quad (3.11)$$

Ao inserir a equação (3.11) na caixa de entrada no GeoGebra, podemos obter a representação geométrica da Hipérbole na janela de visualização do GeoGebra 2D. No GeoGebra, "p" e "d" podem variar seu valor por meio do controle deslizante, modificando em tempo real o gráfico da curva (Figura 11)

https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733 2318-6674

Figura 11 – Hipérbole segundo Apolônio

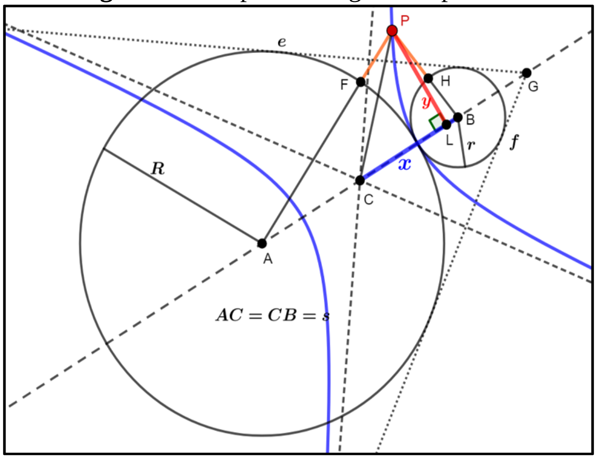


Fonte: Elaborado pelos autores

Agora para seguir com o estudo da Hipérbole, vamos a considerar a seguinte definição: "Para todos os pontos que pertencem a uma Hipérbole, a diferença entre as distâncias que mantêm dos focos é constante, ou seja, atendem à condição $AP - BP = 2d$. A Hipérbole possui dois ramos que não se cruzam e possui dois focos (Smith, 2013). As construções serão realizadas na Janela de Visualização do GeoGebra 2D; é importante destacar que o GeoGebra tem uma ferramenta chamada "Hipérbole", na qual pode construir esta curva indicando os focos é um ponto da Hipérbole.

Nesse sentido, sejam A e B dois pontos arbitrários pertencentes a um plano, que representam os focos da curva. C é o ponto médio entre A e B, então podemos dizer que $AC = s$ y $CB = s$, logo $AB = 2s$. As retas e y g São as assíntotas da curva, que no GeoGebra podem obter-se por meio da caixa de entrada com o comando "Assíntota". Sea e uma circunferência centrada no ponto A e radio $R = s + d$, e f uma circunferência centrada no ponto B e radio $r = s - d$. G é o ponto de intersecção da reta que passa por A e B, e as tangentes comuns das circunferências e y f. A distância d é a semi-diferença entre a distância de um ponto da Hipérbole aos dois focos $d = \frac{AP-AB}{2}$. O ponto F é o ponto de interseção de AP com a circunferência e, H é o ponto de interseção de PB com a circunferência f. Chamemos de $FP = u$ e $HP = u$, logo $FP = HP$, então o triângulo ΔPFH é isóscele. Então, queremos encontrar a relação[10] entre as distâncias x e y. Ou seja, uma equação que expressa a relação entre as distâncias x e y (Figura12).

Figura 12 – Hipérbole segundo Apolônio



Fonte: Elaborado pelos autores

Segundo Smith (2013), para determinar esta equação temos que ter em mente as seguintes relações:

$$cos\ cos\ (180° - \theta) = -\ cos\ cos\ \theta \quad (4)$$

$$x = CP\ cos\ cos\ \theta \quad (4.1)$$

$$y = CP\ sin\ sin\ \theta \quad (4.2)$$

O triângulo PLC é retângulo, portanto, podemos usar o teorema de Pitágoras da seguinte maneira:

$$y^2 = (CP)^2 - x^2 \quad (4.3)$$

Então aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔPCB

$$(BP)^2 = (CP)^2 + (CB)^2 - (CP)(CB)\ cos\ cos\ \theta \quad (4.4)$$

Substituindo os valores de BP e CB fica:

$$(r + u)^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s)\ cos\ cos\ \theta$$

Desenvolvendo $(r + u)^2$:

$$r^2 + 2ru + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s)\ cos\ cos\ \theta$$

Porém $r = s - d$, logo

$$(s - d)^2 + 2(s - d)u + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s)\ cos\ cos\ \theta$$

Desenvolvendo $(s - d)^2$ e agrupando termos semelhantes temos:

[10] Toda fórmula é um registro escrito em forma de equação, da relação entre quantidades que podem ser medidas. Neste caso, as distâncias x e y

https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733 2318-6674

$$s^2 - 2sd + d^2 + 2su - 2du + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s)\cos\cos\theta$$

$$d^2 + u^2 - 2sd + 2su - 2du = (CP)^2 - 2(CP)(s)\cos\cos\theta \quad (8.5)$$

Logo, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔPCA temos:

$$(AP)^2 = (CP)^2 + (CA)^2 - 2(CP)(CA)\cos\cos(180° - \theta)$$

Substituindo os valores de AP, CA e (4) fica:

$$(R + u)^2 = (CP)^2 + (s)^2 + 2(CP)(s)\cos\cos\theta$$

Desenvolvendo $(R + u)^2$:

$$R^2 + 2Ru + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s)\cos\cos\theta$$

Porém $R = s + d$, logo

$$(s + d)^2 + 2(s + d)u + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s)\cos\cos\theta$$

Desenvolvendo $(s + d)^2$ e agrupando termos semelhantes temos:

$$s^2 + 2sd + d^2 + 2su + 2du + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s)\cos\cos\theta$$

$$d^2 + u^2 + 2sd + 2su + 2du = (CP)^2 + 2(CP)(s)\cos\cos\theta \quad (8.6)$$

Agora somamos as equações (4.5) e (4.6) temos que:

$$+\ \frac{d^2 + u^2 - 2sd + 2su - 2du = (CP)^2 - 2(CP)(s)\cos\cos\theta \;\; d^2 + u^2 + 2sd + 2su + 2du = (CP)^2 + 2(CP)(s)\cos\cos(\theta)}{2d^2 + 2u^2 + 4su = 2(CP)^2}$$

Se dividirmos ambos os membros da igualdade por 2, obtemos:

$$d^2 + u^2 + 2su = (CP)^2 \quad (4.7)$$

Subtraindo a equação (4.5) de (4.6) obtemos

$$-\ \frac{d^2 + u^2 - 2sd + 2su - 2du = (CP)^2 - 2(CP)(s)\cos\cos\theta \;\; d^2 + u^2 + 2sd + 2su + 2du = (CP)^2 + 2(CP)(s)\cos\cos(\theta)}{4sd + 4du = 4(CP)(s)\cos\cos\theta}$$

Se dividirmos ambos os membros da igualdade por 4, obtemos:

$$sd + du = (CP)(s)\cos\cos\theta \quad (4.8)$$

Porque $x = (CP)\cos\cos\theta$, podemos escrever a equação (4.8) da seguinte maneira

$$sd + du = xs$$

Se dividirmos ambos os membros da igualdade por d, obtemos:

$$s + u = \frac{xs}{d} \quad \Rightarrow\ u = \frac{xs}{d} - s \ \Rightarrow\ u = \frac{xs - sd}{d}$$

$$u = \frac{s(x-d)}{d} \quad (4.9)$$

Agora vamos voltar à equação (4.3)

$$y^2 = (CP)^2 - x^2$$

Substituindo os valores de CP (4.7):

$$y^2 = d^2 + u^2 + 2su - x^2$$

https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733 2318-6674

Agora substituindo o valor de u (4.9):

$$y^2 = d^2 + \left[\frac{s(x-d)}{d}\right]^2 + 2s\left[\frac{s(x-d)}{d}\right] - x^2$$

$$y^2 = d^2 + \frac{s^2(x-d)^2}{d^2} + \frac{2s^2(x-d)}{d} - x^2$$

Desenvolvendo $(x-d)^2$

$$y^2 = d^2 + \frac{s^2(x^2-2xd+d^2)}{d^2} + \frac{2s^2x}{d} - \frac{2s^2d}{d} - x^2$$

Desenvolvendo $s^2(x^2-2xd+d^2)$ e multiplicamos ambos os membros da igualdade por d^2, obtemos:

$$y^2d^2 = d^4 + s^2x^2 - 2xds^2 + s^2d^2 + 2xds^2 - x^2d^2 - 2s^2d^2$$

$$y^2d^2 = s^2x^2 - x^2d^2 = d^4 - s^2d^2$$

$$y^2d^2 = x^2(s^2-d^2) - d^2(s^2-d^2)$$

Se dividirmos ambos os membros da igualdade por $d^2(s^2-d^2)$, obtemos:

$$\frac{x^2(s^2-d^2)}{d^2(s^2-d^2)} - \frac{y^2d^2}{d^2(s^2-d^2)} = \frac{d^2(s^2-d^2)}{d^2(s^2-d^2)}$$

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{(s^2-d^2)} = 1 \quad (8.10)$$

Na expressão na equação (4.10) considerando $a = d$ e $b = s^2 - d^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1 \quad (8.11)$$

Para chegar na expressão semelhante à equação da Hipérbole encontrada em livros didáticos (Lima, 2015):

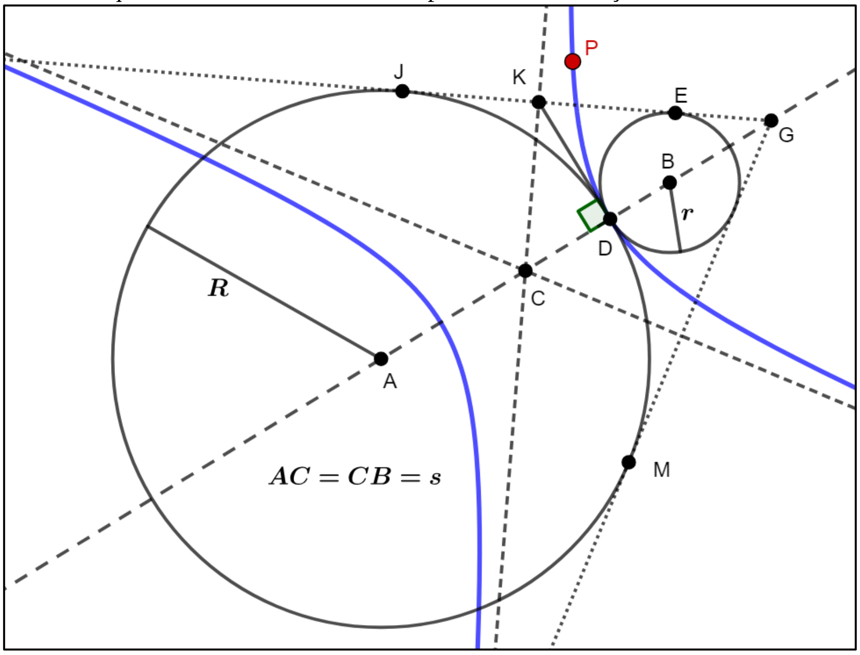
$$b = s^2 - d^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \sqrt{s^2 - d^2}$$

Logo podemos escrever (4.11) da seguinte maneira

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.12)$$

Dessa forma, segundo Smith (2013), a expressão (s^2-d^2) é o quadrado da distância entre o ponto de intersecção das duas circunferências, neste caso o ponto D (que é um vértice da Hipérbole) e o ponto K, que é o ponto médio entre os pontos de tangência (J e E). Na equação (4.12) a representa a distância CD e b é a distância DK (Figura 13)

Figura 13 – O quadrado da distância entre o ponto de intersecção das duas circunferências



Fonte: Elaborado pelos autores

Esta trajetória da Amblytome à Hipérbole com GeoGebra, no que respeita à determinação da equação da referida curva, percorre desde conceito de razão e proporcionalidade em geometria até o tratamento algébrico na teoria das equações. Um processo que parte da determinação das equações de curvas entendidas como lugares geométricos. Esses conceitos mobilizados neste percurso epistemológico e analítico, tem como seu precursor mais atual Pierre de Fermat. Esse matemático, porém, não chegou a essa sofisticação por acaso, mas a partir de estudos de outros processos de criatividade e (re)invenção da Matemática que foi desenvolvida desde os tempos de Meneâcmo e Apolônio, a qual é invisível nos livros didáticos atuais, onde pode ser observado que o processo para determinar a equações das curvas supracitadas é excessivamente simplificado pelo que é chamado de “álgebra de coordenadas”.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após uma leitura e reflexão geral sobre o tema, ao longo das seções deste artigo, foi possível reconhecer o desenvolvimento histórico e epistemológico dos métodos de determinação da equação da hipérbole, desde Menêcmo com a Amblytome, passando pelas contribuições de Apolônio com a Hipérbole, até chegar à expressão que corresponde ao lugar geométrico dos pontos que pertencem a esta curva. Utilizamos a História da Matemática para apoiar o ensino da Hipérbole, apresentando uma abordagem que vai além do corte entre um plano e um cone reto, descrevendo diversos métodos para determinar a equação da Hipérbole até sua expressão reduzida, estabelecendo formas de pensar e agir tanto geometricamente quanto algebricamente.

Embora não seja o foco deste trabalho destacar as potencialidades de tecnologias digitais como o GeoGebra, é importante ressaltar o papel desse software na criação precisa das figuras geométricas. Durante a investigação histórica, o GeoGebra desempenhou um papel significativo na compreensão de correlações geométricas e algébricas nos métodos para determinar as equações da Hipérbole descritos ao longo da história. A utilização do GeoGebra permitiu uma visualização mais clara e uma análise detalhada das propriedades e características da Hipérbole, facilitando o entendimento dos conceitos matemáticos envolvidos.

Este trabalho representa um importante aspecto para novos estudos investigativos sobre o desenvolvimento, apropriação e representação histórica da Hipérbole e de outras curvas no campo da matemática em seu caráter científico e disciplinar. Ao explorar a evolução histórica dos métodos de determinação das equações das cônicas, proporcionamos uma visão mais ampla e contextualizada desses conceitos matemáticos, destacando a importância de uma abordagem histórica no ensino da matemática. Essa perspectiva histórica não apenas enriquece o conhecimento dos alunos, mas também promove uma compreensão mais profunda e integrada dos fundamentos matemáticos.

Em suma, consideramos que a análise histórica dos métodos de determinação da equação da Hipérbole e a utilização de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra contribuem significativamente para o ensino e a aprendizagem da matemática. Este trabalho visa fomentar novos estudos e discussões sobre a importância de integrar a História da Matemática e as tecnologias digitais no processo educativo, promovendo uma abordagem interdisciplinar e inovadora no ensino dos conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BORDALLO, Mirella. **As Cônicas na matemática escolar brasileira**: história, presente e futuro. 2011. 71f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) –Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011.

BORGES, Thays de Souza. **Geometria analítica nos livros didáticos**: uma análise do modelo epistemológicos dominante para o ensino de cônicas no ensino médio. 2023. 117f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2023.

https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733 2318-6674

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

EECKE, Paul Ver. **Les coniques d'apollonius de perge**. 1963.

ESTRADA, Maria; SÁ, Carlos; QUEIRÓ, João; COSTA, Maria. **História da Matemática**. Universidade Aberta, 2000.

HOHENWARTER, Markus. **GeoGebra Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene**. 2002. 236 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais) – Faculdade de Ciências Naturais, Universidade Paris Lodron de Salzburgo, Salzburgo, 2002.

FUCHS, Karl; HOHENWARTER, Markus. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *In*: SÁRVÁRI, C. (ed.). **Proceedings of Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference**. Pecs, Hungria: Universidad de Pecs, 2005 128–133.

LIMA, Elon. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LOPES, Juracélio. **Cônicas e Aplicações**. Dissertação. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 170f. 2011.

MONTEIRO, Rubens Marinho. **Resgate do Teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o GeoGebra**. 2014. 57f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Vitória, 2014.

PRIETO, Juan Luis. GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. **Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC)**, Caracas, v. 7, n. 14, p. 9-23, 2016.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Métodos Históricos para determinar a equação da Orthotome à Parábola. **RPD**, Confresa/MT, v. 9, p. e24011, 2024. https://doi.org/10.26571/10.23926/RPD.2024.v9.e24011.id893

SÁNCHEZ, Ivonne C.; MENDES, Iran Abreu; CASTILLO, Luis Andrés. Atividades históricas com GeoGebra para explorar a representação geométrica do cone. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 11, n. 1, *e*23117, jan./dez., 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés; MENDES, Iran Abreu. Conexões Históricas e Epistemológicas entre a Oxytome e a Elipse: Implicações para o Ensino de Seções Cônicas. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, Mato Grosso, v. 7, p. e2024003, 2024. https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2024003.

SMITH, James. **Las Bellezas Geométricas atrás de las Fórmulas Feas**, 2013. Disponivel em: www.aprendematematicas.org.mx

URBANEJA, Pedro Miguel. **El domínio de las secciones cónicas Apolonio**. RBA, 2017.

APÊNDICE 1 – INFORMAÇÕES SOBRE O MANUSCRITO

AGRADECIMENTOS
O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (FAPESPA) e da Universidade Federal do Pará.

FINANCIAMENTO
Não se aplica

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA
Resumo/Abstract/Resumen: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva
Introdução: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva
Referencial teórico: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva
Análise de dados: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva
Discussão dos resultados: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva
Conclusão e considerações finais: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva
Referências: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva
Revisão do manuscrito: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva
Aprovação da versão final publicada: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Maria Deusa Ferreira Silva

CONFLITOS DE INTERESSE
Os autores declararam não haver nenhum conflito de interesse de ordem pessoal, comercial, acadêmico, político e financeiro referente a este manuscrito.

DISPONIBILIDADE DE DADOS DE PESQUISA
Não publicado

PREPRINT
Não publicado

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

COMO CITAR - ABNT
SÁNCHEZ, Ivonne C.; MENDES, Iran Abreu; SILVA, Maria Deusa Ferreira. História e Tecnologia no Ensino de Matemática: da Amblytome à Hipérbole com GeoGebra. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 12, n. 1, *e*24076, jan./dez., 2024. https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733

COMO CITAR - APA
Sánchez, I. C.; Mendes, I. A.; Silva, L. A. (2024). História e Tecnologia no Ensino de Matemática: da Amblytome à Hipérbole com GeoGebra. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, *12*, *e*24076. https://doi.org/10.26571/reamec.v12.18733

POLÍTICA DE RETRATAÇÃO - CROSSMARK/CROSSREF

Os autores e os editores assumem a responsabilidade e o compromisso com os termos da Política de Retratação da Revista REAMEC. Esta política é registrada na Crossref com o DOI: https://doi.org/10.26571/reamec.retratacao

OPEN ACCESS

Este manuscrito é de acesso aberto (*Open Access*) e sem cobrança de taxas de submissão ou processamento de artigos dos autores (*Article Processing Charges – APCs*).. O acesso aberto é um amplo movimento internacional que busca conceder acesso online gratuito e aberto a informações acadêmicas, como publicações e dados. Uma publicação é definida como 'acesso aberto' quando não existem barreiras financeiras, legais ou técnicas para acessá-la - ou seja, quando qualquer pessoa pode ler, baixar, copiar, distribuir, imprimir, pesquisar ou usá-la na educação ou de qualquer outra forma dentro dos acordos legais.

VERIFICAÇÃO DE SIMILARIDADE

Este manuscrito foi submetido a uma verificação de similaridade utilizando o *software* de detecção de texto iThenticate da Turnitin, através do serviço *Similarity Check* da Crossref.

PUBLISHER

Universidade Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicação no Portal de Periódicos UFMT. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da referida universidade.

EDITOR

Dailson Evangelista Costa

AVALIADORES

Dois pareceristas *ad hoc* avaliaram este manuscrito e não autorizaram a divulgação dos seus nomes.

HISTÓRICO

Submetido: 14 de agosto de 2024.
Aprovado: 10 de novembro de 2024.
Publicado: 21 de novembro de 2024.