

ATIVIDADES HISTÓRICAS COM GEOGEBRA PARA EXPLORAR A REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO CONE

HISTORICAL ACTIVITIES WITH GEOGEBRA TO EXPLORE THE GEOMETRIC REPRESENTATION OF THE CONE

ACTIVIDADES HISTÓRICAS CON GEOGEBRA PARA EXPLORAR LA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONO

Ivonne C. Sánchez*  

Iran Abreu Mendes**  

Luis Andrés Castillo***  

RESUMO

Nas décadas finais do século XX e no início do século XXI, têm sido de interesse educacional estudos para o estabelecimento de diálogos entre a História da Matemática e as tecnologias digitais. Neste trabalho, objetiva-se descrever atividades históricas com GeoGebra para mobilizar conceitos de geometria 3D referentes ao objeto matemático cone. Com isso, pretende-se contribuir com um novo olhar, por meio da tela do computador, para o ensino de matemática baseado nas informações históricas. Foi realizada uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico tendo como fonte pesquisas clássicas sobre História da Matemática. São descritas as bases teóricas que sustentam as referidas atividades – história no ensino da matemática e para ele e as formas de uso do GeoGebra como ferramenta de visualização e descoberta e de representação e comunicação do conhecimento matemático. Considera-se que o uso do GeoGebra para a visualização de casos particulares dos cones propostos por Menêmo e Apolônio possibilita abordar outras situações geradas ao explorar o comportamento das representações geométricas em 3D nesse ambiente computacional.

Palavras-chave: Cone. GeoGebra. História da Matemática. Ensino.

ABSTRACT

In the final decades of the 20th century and the early 21st century, there has been educational interest in studies aimed at establishing dialogues between the History of Mathematics and digital technologies. This work aims to describe historical activities with GeoGebra to mobilize 3D geometry concepts related

* Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com.

** Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (IEMCI), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: iamedes1@gmail.com.

*** Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: luiscastleb@gmail.com.

to the mathematical object, the cone. Thus, the goal is to contribute with a new perspective, through the computer screen, to mathematics education based on historical information. A qualitative bibliographic research was conducted, using classic research on the History of Mathematics as a source. The theoretical foundations supporting the mentioned activities are described – history in mathematics education and its use, and the ways in which GeoGebra is employed as a tool for visualization, discovery, representation, and communication of mathematical knowledge. It is considered that the use of GeoGebra for visualizing specific cases of cones proposed by Menecmus and Apollonius allows addressing other situations generated by exploring the behavior of 3D geometric representations in this computational environment.

Keywords: Cone. GeoGebra. History of Mathematics. Teaching.

RESUMEN

En las últimas décadas del siglo XX y al comienzo del siglo XXI, ha habido interés educativo en estudios para establecer diálogos entre la Historia de las Matemáticas y las tecnologías digitales. Este trabajo tiene como objetivo describir actividades históricas con GeoGebra para movilizar conceptos de geometría 3D relacionados con el objeto matemático del cono. Con esto, se busca contribuir con una nueva perspectiva, a través de la pantalla de la computadora, para la enseñanza de las matemáticas basada en la información histórica. Se llevó a cabo una investigación cualitativa de tipo bibliográfico, utilizando investigaciones clásicas sobre la Historia de las Matemáticas como fuente. Se describen las bases teóricas que sustentan dichas actividades: la historia en la enseñanza de las matemáticas y para ella, y las formas de uso de GeoGebra como herramienta de visualización, descubrimiento y representación y comunicación del conocimiento matemático. Se considera que el uso de GeoGebra para visualizar casos particulares de los conos propuestos por Menaecmus y Apolonio permite abordar otras situaciones generadas al explorar el comportamiento de las representaciones geométricas en 3D en este entorno computacional.

Palabras clave: Cono. GeoGebra. Historia de las Matemáticas. Enseñanza.

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A pesquisa sobre a História da Matemática (HM) no Brasil tem se desenvolvido nas últimas cinco décadas do século XX e no início do século XXI (Mendes, 2022a). Nesse período, pesquisadores da Educação Matemática e da Matemática têm trabalhado em conjunto para estabelecer conexões entre a HM e as tecnologias digitais. Em um estudo recente de Thomsen, Jankvist e Clark (2022), foi realizada uma revisão que abordou a combinação da HM e das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da matemática. Os autores destacaram que os trabalhos mapeados envolvem atividades que utilizam fontes históricas primárias apoiadas em tecnologias digitais, particularmente *Softwares* de Geometria Dinâmica (DGS) e Sistemas de Álgebra Computacional (CAS).

No contexto brasileiro, essa abordagem tem ganhado força com a realização de muitos estudos que exploram tratados históricos matemáticos para o ensino da matemática. Essas atividades podem ser categorizadas em dois tipos de abordagem: a primeira concentra-se nos

instrumentos presentes nos tratados e busca compreender tanto a matemática envolvida na criação desses artefatos quanto a que está presente no seu uso prático. A segunda abordagem permite uma análise mais contemporânea e usa as tecnologias digitais para explorar problemas e demonstrações presentes nesses tratados (Coelho *et al.*, 2023; Sánchez; Castillo, 2022; Teixeira *et al.*, 2023).

Isoda (2002) apresenta várias tecnologias digitais que apoiam esses tipos de atividades, incluindo *softwares* de gráficos, como Algebraic Expresser, Function Probe e Calculus Unlimited; DGS (Jankvist; Geraniou, 2021; Meadows; Caniglia, 2021), como Cabri (Baki; Guven, 2009), Geometer's Sketchpad (Dennis; Confrey, 1997) e GeoGebra (Sousa, 2021; Thomsen, 2021; Zengin, 2018); planilhas eletrônicas, como Excel, Lotus etc.; e CAS (Hašek; Zahradník, 2015). De acordo com Isoda (2002), essas tecnologias ajudam os estudantes a compreender conceitos por meio de diferentes representações.

Neste trabalho, escolhemos tratar sobre o ensino do cone no Ensino Médio por meio de atividades históricas no GeoGebra, pelo fato do software mobilizar conceitos matemáticos relacionados a esse objeto matemático, com uso das ideias deixadas na história por Menêmo e Apolônio de Perga. Nas seções seguintes descrevemos as bases teóricas a respeito da história no ensino da matemática e para ele e do GeoGebra como um Ambiente de Geometria Dinâmica para o ensino da matemática. Depois descrevemos a nossa abordagem do cone com atividades históricas com GeoGebra e, finalmente, apresentamos as considerações finais.

2 HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A HM é um recurso pedagógico que tem despertado o interesse de muitos estudiosos e pesquisadores da Educação Matemática e se estabeleceu para alguns professores como uma metodologia que pode auxiliar o processo de ensino de matemática em sala de aula. Essa tendência da educação procura, como as outras, dar respostas a problemas que sempre existiram desde a antiguidade, como os seguintes: (1) Como tornar os alunos mais acessíveis à matemática que é ensinada?; (2) Pode a tecnologia apoiar o processo de ensino-aprendizagem da matemática?; e (3) Qual a matemática para o ensino? Na tentativa de responder a essas questões, surgiram pesquisas que relatam o esforço para criar teorias e métodos direcionados ao aperfeiçoamento da prática pedagógica que poderá contribuir para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Neste trabalho usaremos a HM para apoiar o ensino do cone com base nas ideias

propostas por Mendes (2022b, p. 19): ele se refere ao uso da HM no ensino e para ele como “explorações educativas da história das ideias produzidas no passado e como podem ser refletidas na Matemática que ensinamos”. De fato, a matemática que conhecemos hoje é um reflexo dos esforços do homem para resolver problemas cotidianos e compreender o mundo. Desde a antiguidade o homem fez inúmeras descobertas e invenções para resolver os problemas que surgiam em sua vida diária – desde, talvez a primeira, a descoberta de como produzir e usar o fogo, para cozinhar e aquecer-se; até a criação de automóveis e aviões como meios de transporte para chegar a lugares mais distantes.

Nesse sentido, professores que usam a HM em suas salas de aulas deveriam refletir com seus estudantes sobre estratégias e práticas criadas ao longo da história humana e que podem ser implementadas ainda hoje para explicar e compreender conteúdos matemáticos imersos em tais práticas, o que promoveria uma possibilidade de um novo método educativo que procure ensino e aprendizagem diferenciados, criativos, investigativos etc. Mendes (2022b), em suas reflexões a respeito do tema, reconhece que o estudo de textos do passado se torna importante para o ensino de matemática, tendo em vista que o professor guia seus estudantes à reconstrução das ideias atualmente presentes na matemática e que foram constituídas – a partir da riqueza do tratamento dos documentos originais – nos livros didáticos.

Uma alternativa teórico-prática que possibilita o uso da história para a criação de atividades didáticas para o ensino de matemática é a Investigação Histórica. Essa perspectiva baseia-se na história e na investigação como fonte de geração de matemática escolar. Para Mendes (2006), é possível adaptar essa perspectiva teórico-prática à medida que valorizamos e adaptamos as informações históricas às necessidades do professor, de modo que seu uso seja mais produtivo na sala de aula. Ainda segundo Mendes, o princípio que articula as atividades de ensino por meio da HM é a *investigação*, de modo que se estabeleça em sala de aula um ambiente criativo, provocador e problematizador do conhecimento evidenciado na HM.

Nessa mesma linha de pensamento, Fossa (2006) sugere que a investigação da HM é sempre uma atividade que envolve a compreensão dos conceitos matemáticos, nesse sentido, Fossa (2006) sugere o desenvolvimento das habilidades matemáticas que o professor e a escola querem que sejam alcançadas pelo aluno. Ele sugere que a HM seja incorporada ao ensino de matemática na forma de atividades de redescoberta ou de resolução de problemas, pois é uma fonte rica de problemas interessantes e desafiantes, que poderá ser usada em sala de aula a fim de possibilitar um melhor entendimento dos conteúdos por parte dos alunos.

A utilização de atividades mediadas pela história possibilita ao aluno a oportunidade de

perceber como os conceitos matemáticos constituídos hoje em dia mudaram com o passar dos tempos, e que os mesmos métodos de resolução dos problemas matemáticos históricos foram aprimorados até chegarem à forma do conhecimento escolar.

Nesse sentido, é importante que as atividades estejam bem organizadas em uma sequência de ensino e que cada uma das etapas de ensino seja organizada cuidadosamente, de maneira que se possam alcançar os objetivos propostos pelo professor. As atividades históricas propostas por Mendes (2006) são apresentadas sob três principais características: atividades de desenvolvimento, de associação e de simbolização. Em nosso trabalho pretendemos usar – em busca de reconstruir os passos dados pelos matemáticos antigos de outras épocas para estudar essas curvas – a HM através de uma sequência de atividades históricas que conduza os alunos à redescoberta e mergulhe-os na história das seções cônicas. Então, as atividades elaboradas baseiam-se no modelo proposto por Mendes (2006, 2022a):

Título da atividade: trata-se do nome que será dado à atividade, ele indicará o tema central a ser investigado e o conteúdo que se pretende abordar através dela.

Objetivos: trata-se de apresentar ao professor as principais finalidades da realização da atividade; é importante que a linguagem esteja bastante clara e concisa para que os estudantes não fiquem com dúvidas.

Conteúdo histórico: nesse item apresentam-se as informações históricas referentes a fatos ou problematizações do conhecimento matemático. Essas informações servem de suporte para o desenvolvimento da atividade investigativa para conduzir o estudante à compreensão e à aprendizagem desse conhecimento matemático.

Material a ser utilizado: trata-se de qualquer material a ser utilizado para a realização da atividade. No caso das atividades produzidas neste trabalho, será o *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Procedimentos operacionais: trata-se da orientação aos professores no sentido de desenvolver as atividades investigativas através de etapas que os conduzam a uma compreensão total.

Desafios propostos nas atividades: as atividades devem ser bem criativas e desafiadoras de modo de provocar a curiosidade dos estudantes. Essa característica desafiadora pode estimulá-los à aprendizagem durante o desenvolvimento de cada desafio.

Outras atividades complementares: estas se constituem, principalmente, de trabalhos que devem ser orientados pelo professor. Esses trabalhos podem ser gerados a partir das próprias atividades desenvolvidas em salas de aulas, que podem resolver-se individualmente ou em grupo.

Como já falamos anteriormente, o material utilizado para produzir as atividades neste trabalho será o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Nesse sentido, apresentamos a seguir as potencialidades desse *software* e a justificativa de sua escolha.

2.1 Ambiente de Geometria Dinâmica

Nas últimas décadas, a sociedade passou por uma grande mudança devido à incorporação das tecnologias digitais. Essas tecnologias influenciaram todas as áreas em que o ser humano se desenvolve. A comunicação é um exemplo disso: hoje em dia as informações dos eventos que acontecem no mundo chegam mais rapidamente às pessoas através da internet, do rádio, da televisão, do *smartphone* etc. Os empregos também foram influenciados pela tecnologia, graças ao desenvolvimento de *softwares*, de aplicativos que ajudam a aprimorar o trabalho de forma eficaz e de Inteligência Artificial (IA). Nesse sentido, a educação também foi impactada pelas tecnologias digitais com a criação das calculadoras e o desenvolvimento dos computadores e da internet.

A característica principal que distingue a geometria dinâmica e a transformação contínua em tempo real é frequentemente chamada *arrastamento*. Segundo Goldenberg e Cuoco (1998), essa característica permite ao usuário deslocar livremente os elementos de uma construção e observar como outros elementos respondem dinamicamente às condições alteradas à medida que são movidos por todo o plano. Além disso, quando a construção é consistente, ou seja, quando é baseada na teoria geométrica, o *software* mantém todas as relações que foram especificadas como restrições essenciais da construção original, e todas as relações que são consequências matemáticas destas. Os SGD que foram amplamente usados pelos professores são: o Geometer's Sketchpad, o Cabri Geometry II, o Cindirrella e o GeoGebra.

Nesse contexto, uma discussão que veio à tona com o uso dos SGD foi a distinção entre *desenho* e *construção* de uma figura geométrica, já que antigamente – quando construíamos objetos geométricos com lápis, papel e outras tecnologias, como régua e compasso, ou seja, em um entorno estático – tais discussões não eram necessárias (Gadanidis; Borba; Silva, 2016). Nesse sentido, Laborde (1997) define *desenho* como uma representação possível do objeto geométrico, que também possui outras propriedades, estas não exigidas pelas propriedades definidoras da figura geométrica; e *construção*, como uma figura geométrica que, no decorrer do deslocamento de um de seus elementos, preserva as propriedades espaciais que respondem pelas propriedades geométricas do objeto que está representando. Dessa forma, a exigência de comunicar ao programa um procedimento de construção geométrica permite caracterizar o objeto geométrico.

Assim, em alguns desafios das atividades históricas descritas neste trabalho, os alunos terão que construir um *desenho dinâmico*. Segundo Laborde (1997), esse é um desenho feito

em um ambiente dinâmico, que evoca uma certa teoria geométrica e preserva as propriedades espaciais que lhe foram atribuídas em sua construção após ser arrastado por seus elementos livres. No nosso caso, consideramos como desenho dinâmico aquele desenho feito na interface do GeoGebra, tanto em 2D como em 3D, que foi construído com as ferramentas do *software* considerando a teoria geométrica que lhe está subjacente e as propriedades espaciais que lhe foram atribuídas.

2.2 O GeoGebra: um meio dinâmico para aprender matemática

O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2002 como um *software* de Geometria Dinâmica e Álgebra no Plano, mas rapidamente os recursos do *software* se expandiram para outras áreas da matemática como o Cálculo, a Estatística, a Geometria no Espaço etc. Desde 2002, a expansão do GeoGebra tornou-se um fenômeno de popularidade devido ao seu fácil acesso e dinamismo, e o *software* passou a ser uma ferramenta matemática poderosa para aprender e criar conhecimento matemático.

Ao falar sobre o GeoGebra, é inevitável olhar a dissertação de mestrado do criador desse *software*, intitulada *GeoGebra Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene* (Hohenwarter, 2002) – na tradução para o português, *GeoGebra Um sistema de software para geometria dinâmica e álgebra plana*. Na dissertação, o autor apresenta o GeoGebra, sua fundamentação matemática e computacional e uma aplicação do *software* para alguns problemas de matemática. Consideramos que objetivo de Hohenwarter (2002) foi de materializar um programa de computador chamado GeoGebra que pode ser utilizado para aulas de geometria e que cria uma conexão entre software de geometria dinâmica e álgebra computacional para o tratamento de objetos geométricos no plano.

Assim, o GeoGebra é uma tentativa de unir esses dois tipos de *software*, os de Geometria Dinâmica e os de Álgebra Computacional, em que geometria, álgebra e cálculo são tratados como parceiros iguais. O *software* oferece duas representações de cada objeto: (1) algébrica, com uso de coordenadas, equações ou representação paramétrica; e (2) geométrica, como o conjunto de soluções associado (Hohenwarter, 2002).

Essa nova conexão dinâmica *bidirecional* entre múltiplas representações de objetos matemáticos abre uma ampla gama de novas possibilidades de aplicação de *software* de matemática dinâmica para ensinar e aprender matemática – ao mesmo tempo em que promove a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos de uma forma que não era possível há

alguns anos. Preiner (2008, p. 61-63) expõe algumas razões para escolher o GeoGebra como recurso tecnológico para o ensino e a aprendizagem da matemática:

Múltiplas representações: o GeoGebra fornece múltiplas representações de objetos matemáticos que potencialmente promovem a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos. As representações algébricas numéricas de objetos são exibidas na janela de álgebra e as representações gráficas desses objetos são exibidas na janela de visualização.

Conexão bidirecional: No GeoGebra, a necessidade de uma relação bidirecional de geometria dinâmica e álgebra computacional foi percebida. As diferentes representações de objetos matemáticos são conectadas dinamicamente, permitindo que o GeoGebra adapte cada representação às modificações de sua contraparte.

Manipuláveis virtuais: o GeoGebra permite a criação de materiais instrucionais interativos baseados na web, chamados de planilhas dinâmicas.

Comunidade internacional de usuários: o GeoGebra conta com uma comunidade internacional de professores e pesquisadores que cria e compartilha materiais de ensino de matemática e ciências que podem ser baixados e usados por professores de todo o mundo.

Diante de tudo o que foi exposto até agora, percebemos que o uso do GeoGebra promete ser eficaz para o ensino e a aprendizagem da matemática. Nesse sentido, com base na perspectiva de Fuchs e Hohenwarter (2005) e Prieto (2016) apresenta uma categorização do uso do GeoGebra em situações de ensino e aprendizagem da matemática:

Como ferramenta de visualização: o GeoGebra pode ser usado para oferecer uma perspectiva dinâmica de conceitos e relações Matemáticas, a partir de múltiplos registros de representação (Dikovic, 2009; Preiner, 2008). Desta forma, os sujeitos têm a possibilidade de “ver” e “explorar” conhecimentos matemáticos muitas vezes inacessíveis com outros dispositivos;

Como ferramenta de construção: o GeoGebra permite a criação e manipulação de construções geométricas em 2D e 3D, com altos níveis de liberdade e consistência, favorecendo assim o estudo de objetos de geometria euclidiana e analítica (Liste, 2008);

Como ferramenta de descoberta: o uso adequado do GeoGebra pode favorecer a descoberta de padrões, regularidades ou invariantes matemáticos (por exemplo, invariantes geométricos) nos objetos exibidos em sua interface, o que aproxima os alunos do conhecimento matemático institucionalizado;

Como ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático: o GeoGebra oferece aos professores um ambiente amigável para o desenvolvimento de materiais dinâmicos através dos quais eles podem representar e comunicar conceitos matemáticos e relacionamentos com seus alunos.

Essa categorização apresentada por Prieto permite uma visão mais ampla de como os professores podem utilizar o GeoGebra em suas aulas de classes com diferentes propósitos. Nossa intenção é que o GeoGebra possa ser utilizado em uma ou duas dessas características nas atividades históricas. Para criar as atividades históricas nós usamos o GeoGebra Clássico 6, na versão *on-line*, que pode ser usado em computadores, *tablets e smartphones*, sem necessidade de instalar o software.

3 ATIVIDADES HISTÓRICAS COM GEOGEBRA

Consideramos que as atividades históricas com GeoGebra promovem aprendizagem, investigação, exploração, criatividade e visualização de métodos de construção e relações dos conceitos matemáticos que foram escritos ao longo do tempo. Para criarmos essas atividades, então, é necessário buscarmos no material histórico existente todas as informações – teóricas e metodológicas – referentes ao tema em questão. Assim, existe uma necessidade de resgatar a investigação histórica como meio de (re)construção da matemática produzida em diferentes contextos socioculturais e em diferentes épocas da vida humana. É nesse conteúdo histórico que as atividades históricas são criadas, visando à exploração de suas implicações pedagógicas nas atividades de sala de aula.

Os objetivos propostos de cada atividade correspondem àqueles propostos pelos programas oficiais ou pelos livros didáticos. Os professores, então, podem apresentar, em uma linguagem clara e concisa, as principais finalidades da realização da atividade. O GeoGebra é o meio utilizado para realizar as atividades, assim, serão apresentados aos estudantes desafios em formato de arquivos que permitam explorar e visualizar uma construção já realizada do conteúdo matemático e favorecer a descoberta de padrões, regularidades ou invariantes matemáticas. Outro desafio para os estudantes é construir o objeto matemático respeitando as suas relações geométricas.

Esse tipo de atividade histórica com GeoGebra pode ser usado para o ensino e a aprendizagem de qualquer conteúdo matemático ou geométrico. Nesta pesquisa, as atividades propostas baseiam-se no desenvolvimento histórico do objeto matemático cone e utilizam como fonte Urbaneja (2017) e Boyer (1974).

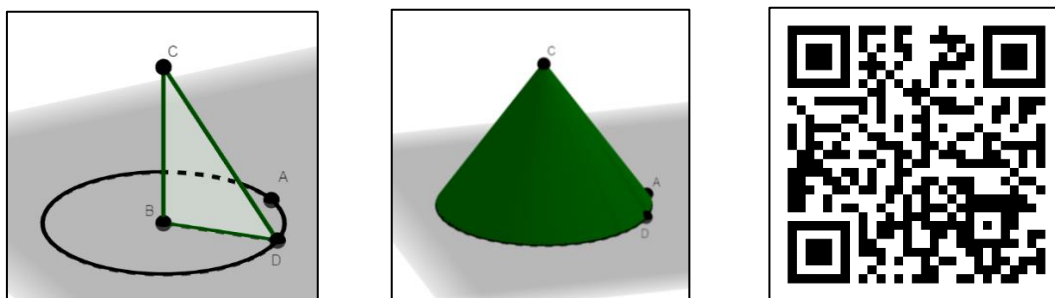
A atividade que apresentamos no Quadro 1 tem a finalidade de revisar aspectos matemáticos relacionados ao cone. Os aspectos históricos nela presentes procuram enfatizar os métodos de construção de cones utilizados pelos gregos. A partir da história presente aqui,

pretendemos fazer com que os alunos possam diferenciar os tipos de cones e os elementos que compõem esse objeto geométrico. Nessa atividade sugerimos que utilizem o recurso de GeoGebra chamado “Atividade de Cone”. Os objetivos são: formular o conceito de cone; construir cones; diferenciar cones retos, agudos e obtusos.

Quadro 1 - Diálogo entre professor e aluno.

Observe o triângulo apresentado abaixo (Figura 1) e diga que tipo de triângulo é. Ative a característica de “Exibir Rastro” no segmento \overline{CD} e movimente o ponto D por todo o círculo c . Que figura geométrica se forma quando completar um ciclo?

Figura 1 – Geração de um cone



A cada revolução que o ponto D faz sobre a circunferência¹, você pode notar que há uma figura geométrica que se forma, que chamaremos de Cone. Afinal, o que é cone?

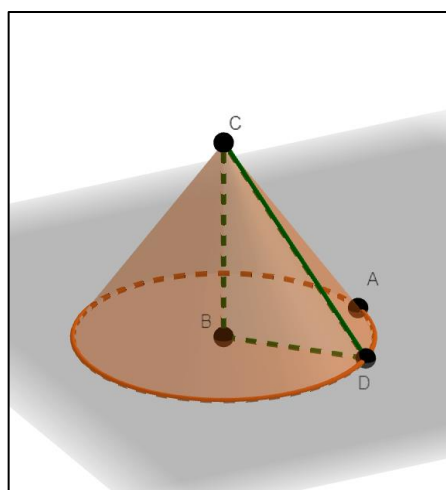
Cone é uma figura geométrica formada pela união de uma região circular com um ponto que não pertence a esse plano. Podemos vê-lo também como sólido de revolução, ou seja, ao girar um triângulo em torno de um de seus lados, forma-se um cone no espaço. A base do cone é sempre uma circunferência. Outro elemento importante é o raio da base da circunferência (r), o qual é a distância entre o centro do cone e a sua face externa. Além disso, o vértice do cone (V) é um ponto não coplanar à circunferência da base; e a altura do cone (h) é a distância entre o vértice do cone e a base. Lembre-se de que altura é sempre perpendicular ao plano que contém a base do cone, ou seja, o ângulo entre a altura e a base deve ser de 90° . O eixo do cone é o segmento de reta que une o vértice ao centro da base. Em alguns tipos de cone, ele coincide com a altura.

Finalmente, a geratriz do cone é o segmento que liga o vértice ao ponto mais externo da circunferência da base, mas passa pela superfície do cone. Portanto, não tem o mesmo valor que a altura. A geratriz é calculada com uso do teorema de Pitágoras, da mesma forma que o raio e a altura.

O primeiro desafio! Diante tudo que já falamos e discutimos, propomos que você, utilizando a Figura 1 como apoio, identifique os elementos do cone discutidos anteriormente. Como um desafio a mais, sugerimos que, com auxílio da ferramenta “Cone” do GeoGebra, você construa o cone de centro B , vértice C e raio \overline{BD} (elementos requeridos pelo GeoGebra para construir o cone). Você obterá a figura geométrica observada na Figura 2.

Figura 2 – Construção de um cone de centro B , vértice C e raio \overline{BD}

¹ No GeoGebra, a palavra circunferência foi traduzida como círculo.

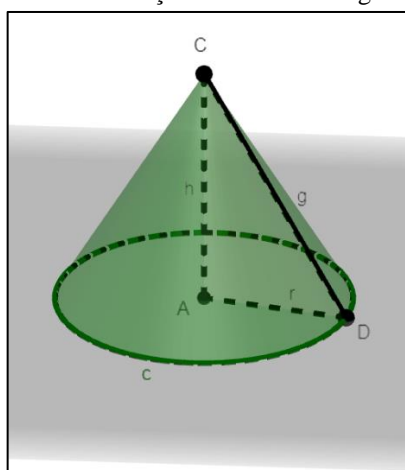


Mais um desafio! Agora que já você construiu o cone, identifique que objetos do seu entorno podem representar o cone – sugerimos que você observe objetos fora de sua sala de aula, no percurso da escola para sua casa, na sua casa, em outros lugares que você conhece ou em imagens encontradas pela internet.

Uma ideia! Primeiro determine o ângulo no vértice do cone, utilizando a ferramenta de Ângulo. Uma sugestão: você tem que encontrar primeiro o ponto diametralmente oposto a D . Depois, com a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, determine o valor do raio (\overline{BD}) e do eixo (\overline{BC}) do cone.

Um pouco de história do Cone! O cone foi estudado pelos antigos gregos, nos séculos IV e III a.C. – a definição de cone daquela época é bastante restrita. Um cone era um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de sus lados. Portanto, naquela época, apenas os cones retos com uma única folha eram considerados. Assim, a definição de cone era a seguinte: *um cone, ou superfície cônica, é uma superfície gerada por uma reta g (geratriz) que passa por um ponto dado C (vértice) e percorre os pontos de uma linha dada c (diretriz), onde C não pertence a c . Em particular, se a diretriz é uma circunferência com centro A e a reta AC é perpendicular ao plano que contém a c , a superfície cônica é um cone circular reto* (ver Figura 3).

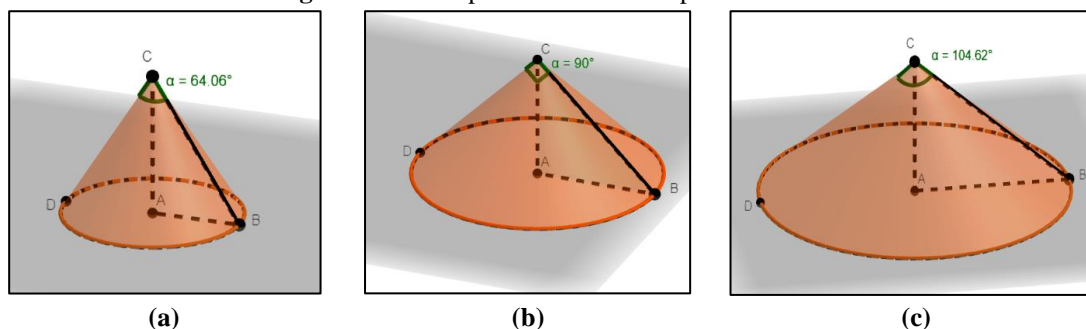
Figura 3 – Definição de cone na antiga Grécia



O cone foi utilizado por Menêmo para resolver o problema da duplicação do cubo. Ele utilizou três tipos de cones, cada um com uma medida diferente no ângulo do vértice, na seguinte ordem: (1) Se o ângulo $\angle ACD$ for menor que um ângulo reto, ou seja, se for um ângulo agudo, então o cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto AC é um cone *oxigonal* ou de *ângulo agudo* (Figura 4a); (2) se o ângulo $\angle ACD$ for igual a um ângulo reto, o cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto AC é um cone *ortogonal* ou *retângulo* (Figura 4b); e (3) se o ângulo

$\angle ACD$ for maior que um ângulo reto, ou seja, se for um ângulo obtuso, o cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto AC é um cone *ambliagonal* ou *obtusos* (Figura 4c).

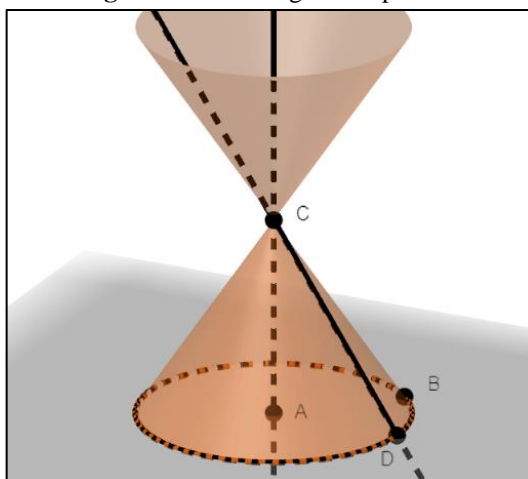
Figura 4 – Três tipos de cone usados por Menêcmo



Que tal outro desafio? Você é capaz de construir no GeoGebra os três tipos de cone utilizados por Menêcmo? Como você fez para construir o cone retângulo? Qual é a relação que devem ter as medidas dos catetos? Quanto a construção do cone agudo e do obtusângulo?

Um pouco mais de história, outro método para construir o cone! Apolônio de Perga (262-190 a.C.) foi um dos matemáticos que mais se destacaram em seu tempo, por suas obras produzidas, que influenciaram a matemática atual. Recebeu o apelido de Grande Geômetra, devido às suas diversas obras sobre geometria – a mais conhecida delas é *As Cônicas*, na qual faz um estudo profundo sobre o tema. Nessa obra, Apolônio apresenta uma nova definição de cone: “*Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descrevera a superfície e um cone duplo*” (Figura 5). A partir dessa definição, ficou conhecido o cone de duas folhas.

Figura 5 – Cone segundo Apolônio



Outro desafio! Que tal construir o cone agora no GeoGebra, utilizando o método proposto por Apolônio?

Fonte: Elaboração dos autores (2023)

Diante do exposto, consideramos que as Atividades Históricas com GeoGebra não apenas proporcionam um ambiente propício para aprendizagem, investigação, exploração e criatividade, mas também estimulam a visualização de métodos de construção e relações dos conceitos matemáticos ao longo da história. Para desenvolver tais atividades, é imperativo

realizar uma cuidadosa pesquisa nos registros históricos disponíveis, abrangendo tanto as informações teóricas quanto metodológicas relacionadas ao tema em análise. Esse resgate da investigação histórica não apenas reconstrói a matemática produzida em diversos contextos socioculturais e períodos históricos, mas também serve como alicerce para a criação de atividades históricas visando a explorar suas implicações pedagógicas na dinâmica da sala de aula.

Os objetivos delineados para cada atividade estão alinhados com os propostos pelos programas educacionais e livros didáticos oficiais. Os professores, ao apresentarem esses objetivos de forma clara e concisa, oferecem aos estudantes uma compreensão mais profunda das metas a serem alcançadas com a realização das atividades propostas. Utilizando o GeoGebra como ferramenta central, os desafios apresentados aos estudantes são estruturados em formato de arquivos, permitindo a exploração e visualização de construções matemáticas preexistentes, incentivando a descoberta de padrões, regularidades ou invariantes matemáticos. A construção do objeto matemático, respeitando suas relações geométricas, representa outro desafio estimulante para os estudantes.

No âmbito desta pesquisa, as atividades propostas têm como base o desenvolvimento histórico do objeto matemático cone, utilizando as fontes de Urbaneja (2017) e Boyer (1974). A atividade exemplificada no Quadro 1 visa a revisar aspectos matemáticos relacionados ao cone, com ênfase nos métodos de construção utilizados pelos gregos. Buscamos, por meio desta atividade, uma melhor compreensão nos estudantes para diferenciar os tipos de cones e compreender os elementos que compõem esse objeto geométrico. A sugestão é que os estudantes utilizem o recurso específico do GeoGebra chamado "Atividade de Cone" para alcançar os objetivos propostos: formular o conceito de cone, realizar a construção de cones e distinguir entre cones retos, agudos e obtusos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, ancorados nas contribuições históricas de Menêmo e Apolônio, almejamos explorar atividades envolvendo o GeoGebra para promover uma compreensão mais profunda dos conceitos de geometria espacial, com foco no cone como objeto matemático. Nosso objetivo primordial é aprimorar o ensino de conteúdos pertinentes à geometria espacial por meio dessa ferramenta digital. Para atingir esse propósito, delineamos as bases que sustentam as atividades, considerando a perspectiva pedagógica da história no ensino e a

integração das tecnologias digitais, notadamente o GeoGebra.

A abordagem que adotamos neste trabalho é moldada pela nossa experiência prática com o software, que proporciona a visualização detalhada de casos específicos e a exploração de questões em aberto relacionadas ao comportamento das representações dos cones, desde as concepções iniciais de Menêmo e Apolônio. A escolha dessa tecnologia digital não apenas enriquece as informações históricas sobre o objeto matemático em questão, mas também viabiliza a formulação de novas indagações que podem ser exploradas de maneira significativa no ambiente da sala de aula da educação básica.

Ao utilizar o GeoGebra, conseguimos transcender as limitações das abordagens tradicionais de ensino, permitindo aos estudantes uma imersão mais dinâmica e interativa nos conceitos de geometria espacial. A visualização tridimensional oferecida pelo software amplia a compreensão dos alunos sobre a forma e as propriedades do cone, tornando o aprendizado mais palpável e estimulante.

Dessa forma, a fusão entre a história da matemática, a pedagogia e as tecnologias digitais se revela como um caminho promissor para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. A utilização do GeoGebra não apenas resgata a trajetória histórica dos conceitos matemáticos, mas também os revitaliza, proporcionando uma abordagem contemporânea e envolvente para o ensino de geometria espacial na educação básica. Nossa abordagem, fundamentada na interseção entre história, pedagogia e tecnologia, visa a promover uma aprendizagem mais significativa e conectada com as demandas do século XXI.

REFERÊNCIAS

BAKI, Adnan; GUVEN, Bulent. Khayyam with Cabri: experiences of pre-service mathematics teachers with Khayyam's solution of cubic equations in dynamic geometry environment. **Teaching Mathematics and its Applications**, Oxônia, v. 28, n. 1, p. 1-9, 2009. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrp001>

BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

COELHO, Iara Martins; TEIXEIRA, Lucas Santos; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. História da matemática e geometria dinâmica: um novo olhar ao teorema de Viviani para o ensino médio. **Journal of Education Science and Health**, [S. l.], v. 3, n. 1, 2023. <https://doi.org/10.52832/jesh.v3i1.178>

DENNIS, David; CONFREY, Jere. Drawing logarithmic curves with Geometer's sketchpad: a method inspired by historical sources. *In*: KING, James R.; SCHATTSCHNEIDER, Doris

(org.). **Geometry turned on!** Washington: MAA, 1997. p. 147-156.

DIKOVIC, Ljubica. Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. **Computer Science and Information Systems**, Sérvia, v. 6, n. 2, p. 191-203, 2009. <https://doi.org/10.2298/csis0902191D>

FOSSA, John A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da Antiguidade. *In*: MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 79-136.

GADANIDIS, George; BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

GOLDENBERG, E. Paul; CUOCO, Albert A. What is dynamic geometry? *In*: LEHER, Richard; CHAZAN, Daniel (ed.). **Designing learning environments for developing understanding of geometry and space**. Londres: Lawrence Erlbaum Associates, 1998. p. 350-367.

HAŠEK, Roman; ZHRADNÍK, Jan. Study of historical geometric problems by means of CAS and DGS. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, [S. l.], v. 22, n. 2, p. 53-58, 2015. Disponível em: <https://www.learntechlib.org/p/175079>

HOHENWARTER, Markus. **GeoGebra Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene**. 2002. 236 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais) – Faculdade de Ciências Naturais, Universidade Paris Lodron de Salzburgo, Salzburgo, 2002.

FUCHS, Karl; HOHENWARTER, Markus. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *In*: SÁRVÁRI, C. (ed.). **Proceedings of Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference**. Pecs, Hungria: Universidad de Pecs, 2005 128–133.

ISODA, Masami. Inquiring mathematics with history and software. *In*: FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan (org.). **History in Mathematics Education**. [S. l.]: Springer, 2002. p. 351-358. (New ICMI Study Series). DOI: https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_10

JANKVIST, Uffe Thomas; GERANIOU, Eirini. “Whiteboxing” the content of a formal mathematical text in a Dynamic Geometry Environment. **Digital Experiences in Mathematics Education**, [S. l.], v. 7, n. 2, p. 222-246, 2021. <https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6>

LABORDE, Colette. Cabri Géométra o una nueva relación con la geometría. *In*: PUIG, L. (ed.). **Investigar y enseñar**. Variedades de la educación matemática. Madrid: Una Empresa Docente, 1997. p. 33-48.

MEADOWS, Michelle; CANIGLIA Joanne. That was then... This is now: Utilizing the history of mathematics and dynamic geometry software. **International Journal of Education**

in **Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)**, Konya, v. 9, n. 2, p. 198-212, 2021. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1106>

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **Revista Cocar**, Belém, n. 14, p. 01-21, 2022a. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5509>

MENDES, Iran Abreu. **Usos da história no ensino de matemática**: reflexões e experiências. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2022b.

MENDES, Iran Abreu. A investigação histórica como agente de cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 79-136.

PREINER, Judith. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers**: The case of GeoGebra. 2008. 265 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Naturais, Universidade de Salzburgo, Salzburgo, 2008.

PRIETO, Juan Luis. GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. **Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC)**, Caracas, v. 7, n. 14, p. 9-23, 2016. Disponível em: <https://convite.cenditel.gob.ve/revistaclic/index.php/revistaclic/article/view/866>

SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto; CASTILLO, Luis Andrés. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 214-226, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030>

SOUSA, Giselle Costa de. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Belém, v. 16, n. 37, p. 140-159, 2021. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310>

TEIXEIRA, Lucas Santos; COELHO, Iara Martins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 9, n. 2, p. e2002, 2023. <https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467>

THOMSEN, Marianne. Working with Euclid's geometry in GeoGebra: experiencing embedded discourses. In: NORTVEDT, G. A. *et al.* (ed.). **Bringing Nordic mathematics education into the future**: Proceedings of Norma 20, The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education. Oslo: SMDF, 2021. p. 257-264.

THOMSEN, Marianne; JANKVIST, Uffe Thomas; CLARK, Kathleen Michelle. The interplay between history of Mathematics and Digital Technologies: a review. **ZDM Mathematics Education**, [S. l.], v. 54, p. 1631-1642, 2022. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0>

URBANEJA, Pedro Miguel. **El dominio de las secciones cónicas Apolonio**. Barcelona: RBA, 2017.

ZENGIN, Yılmaz. Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Abingdon, v. 49, n. 7, p.1083-1098, 2018.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850>

APÊNDICE 1 – INFORMAÇÕES SOBRE O MANUSCRITO

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (FAPESPA) e da Universidade Federal do Pará.

FINANCIAMENTO

Não se aplica

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA

Resumo/Abstract/Resumen: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo
Introdução: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo
Referencial teórico: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo
Análise de dados: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo
Discussão dos resultados: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo
Conclusão e considerações finais: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo
Referências: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo
Revisão do manuscrito: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo
Aprovação da versão final publicada: Ivonne C. Sánchez, Iran Abreu Mendes e Luis Andrés Castillo

CONFLITOS DE INTERESSE

Os autores declararam não haver nenhum conflito de interesse de ordem pessoal, comercial, acadêmico, político e financeiro referente a este manuscrito.

DISPONIBILIDADE DE DADOS DE PESQUISA

Não publicado

PREPRINT

Não publicado

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

COMO CITAR - ABNT

SÁNCHEZ, Ivonne C.; MENDES, Iran Abreu; CASTILLO, Luis Andrés. Atividades históricas com GeoGebra para explorar a representação geométrica do cone. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 11, n. 1, e23117, jan./dez., 2023. <https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866>

COMO CITAR - APA

Sánchez, I. C.; Mendes, I. A.; Castillo, L. A. (2023). Atividades históricas com GeoGebra para explorar a representação geométrica do cone. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, 11(1), e23117. <https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866>

LICENÇA DE USO

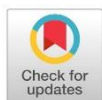
Licenciado sob a Licença Creative Commons [Attribution-NonCommercial 4.0 International \(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Esta licença permite compartilhar, copiar, redistribuir o manuscrito em qualquer meio ou formato. Além disso, permite adaptar, remixar, transformar e construir sobre o material, desde que seja atribuído o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico.



DIREITOS AUTORAIS

Os direitos autorais são mantidos pelos autores, os quais concedem à Revista REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática - os direitos exclusivos de primeira publicação. Os autores não serão remunerados pela publicação de trabalhos neste periódico. Os autores têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicado neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico. Os editores da Revista têm o direito de realizar ajustes textuais e de adequação às normas da publicação.

POLÍTICA DE RETRATAÇÃO - CROSSMARK/CROSSREF



Os autores e os editores assumem a responsabilidade e o compromisso com os termos da Política de Retratação da Revista REAMEC. Esta política é registrada na Crossref com o DOI: <https://doi.org/10.26571/reamec.retratacao>



PUBLISHER

Universidade Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicação no [Portal de Periódicos UFMT](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da referida universidade.

EDITOR

Dailson Evangelista Costa  

EDITORA CONVIDADA

Daysi Julissa García-Cuéllar  

AVALIADORES

Dois pareceristas *ad hoc* avaliaram este manuscrito e não autorizaram a divulgação dos seus nomes.

HISTÓRICO

Submetido: 14 de septiembre de 2023.

Aprovado: 25 de noviembre de 2023

Publicado: 18 de Dezembro de 2023