

## DISEÑO DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN QUE COMBINA FOTOGRAFÍA, GEOGEBRA y FUNCIONES MATEMÁTICAS

DESIGN OF A STUDY AND RESEARCH PATH THAT COMBINES PHOTOGRAPHY, GEOGEBRA AND MATHEMATICAL FUNCTIONS

DESENHO DE UM CAMINHO DE ESTUDO E PESQUISA QUE COMBINA FOTOGRAFIA, GEOGEBRA E FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Karina Amalia Rizzo\* 

Viviana Angélica Costa\*\* 

### RESUMEN

En este trabajo se presenta el diseño, la planificación y una breve descripción de la implementación piloto de la propuesta de un Recorrido de Estudio e Investigación, en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Esto es parte de una investigación más amplia, de la que se comparten sus objetivos, las preguntas de investigación y, cómo se llevaría a cabo. El Recorrido de Estudio e Investigación que parte de la pregunta generatriz: ¿Cómo resolver una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas? para ser implementado en un curso de matemática en la escuela secundaria argentina con jóvenes de entre 15 y 16 años. Su diseño se basa en un concurso internacional, que se realiza periódicamente cada año desde 2016, denominado FotoGebra, libre, gratuito y abierto para, jóvenes de entre 13 a 17 años y profesores en formación.

**Palabras clave:** Recorrido de Estudio e Investigación. Funciones matemáticas. GeoGebra. Fotografía.

### ABSTRACT

This paper presents the design, planning and a brief description of the pilot implementation of the proposal for a Study and Research Courses, within the framework of the Anthropological Theory of the Didactic. This is part of a broader investigation, of which its objectives, research questions and how it would be carried out are shared. The Study and Research Courses starts from the generating question: How to solve a real problematic situation using a photograph, GeoGebra and mathematical functions? to be implemented in a mathematics course in the Argentine high school with young people between 15 and 16 years old, and its design is based on an international contest, which is held periodically every year since 2016, called FotoGebra, free, free and open to, young people between 13 and 17 years old and teachers in training.

**Keywords:** Study and Research Courses. Mathematical functions. GeoGebra. Photography.

\* Licenciada en Educación por la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM). Profesora en matemática, Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N°24 (ISFD N° 24). Profesora en la Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Avellaneda (UTN.FRA) y profesor en Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N°24 (ISFDyTN°24), Bs. As. Argentina. Dirección de correspondencia: Sarmiento 876, 3° piso, Quilmes, Buenos Aires, Argentina. Correo Electrónico: [karinarizzo71@gmail.com](mailto:karinarizzo71@gmail.com)

\*\* Doctora en Enseñanza de las Ciencias (Mención Matemática) por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Profesora Titular con dedicación exclusiva en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Plata (UNLP), La Plata, Buenos Aires, Argentina. Correo Electrónico: [vacosta@ing.unlp.edu.ar](mailto:vacosta@ing.unlp.edu.ar)

## RESUMO

Este trabalho apresenta a concepção, planeamento e uma breve descrição da implementação piloto da proposta de uma Visita de Estudo e Investigación, no quadro da Teoría Antropológica da Didáctica. Isso faz parte de uma investigação mais ampla, da qual são compartilhados seus objetivos, questões de pesquisa e como ela seria realizada. A Jornada de Estudio e Pesquisa parte da questão geradora: Como resolver uma situação problemática real usando uma fotografia o GeoGebra e funções matemáticas? a ser implementado em um curso de matemática na escola secundária argentina com jovens entre 15 e 16 anos, e seu design é baseado em um concurso internacional, realizado periodicamente todos os anos desde 2016, chamado FotoGebra, gratuito, e aberto a jovens entre 13 e 17 anos e professores em formação.

**Palavras-chave:** Visita de estudo e pesquisa. Funções matemáticas. GeoGebra. Fotografia.

## 1 INTRODUCCIÓN

Al efectuar un análisis histórico de la enseñanza de la matemática en el nivel secundario, se advierte la sucesión de diferentes paradigmas. CHEVALLARD (2012) define un paradigma didáctico como un conjunto de reglas que prescriben, implícitamente o no, lo que se va a estudiar y las diversas formas de realizarlo. En particular la didáctica de la matemática se ocupa de las condiciones específicas y restricciones que hacen posible la construcción y difusión de los conocimientos matemáticos, útiles a la sociedad (CHEVALLARD, 2013e).

En este campo, uno de los más antiguos paradigmas didácticos, es el llamado paradigma de estudiar “grandes sistemas”, pues el conocimiento se organiza en torno al estudio de sistemas matemáticos. Este, en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), dio lugar al paradigma vigente y dominante en las instituciones educativas, que se conoce como el de “visitar obras o monumentos” (PVO), donde los saberes (cada una de esas piezas de conocimiento) se plantean como un monumento que destaca por su cuenta y que los estudiantes deben admirar y disfrutar, incluso cuando saben casi nada acerca de sus razones de ser actuales o del pasado (CHEVALLARD, 2012). Este paradigma se reduce a escuchar un informe o una exposición realizada por el docente-guía sobre el monumento visitado, ya que se consideran las obras acabadas y cerradas de las que se ha desvanecido la situación problemática que las originó, así como toda posibilidad de cuestionamiento de estas, reduciendo el papel del estudiante al de mero espectador (GASCÓN y NICOLÁS, 2020; OTERO, FANARO, LLANOS, 2013).

Según Chevallard (2013a) el principal efecto de esta realidad a largo plazo es la creciente tendencia entre los estudiantes a desarrollar la relación con el conocimiento escolar, que denomina “papelera de reciclaje/vaciar papelera de reciclaje”, pues todo el conocimiento

es olvidado o ignorado, tan pronto como se hayan aprobado los exámenes y lo poco que queda de conocimiento después del paso por la escuela, tiende a ser inservible pues raramente se consideran para las situaciones que se podrían enfrentar fuera de ella.

En particular, en las instituciones de escuelas secundarias argentinas, predomina este paradigma que avala la aplicación de los contenidos, sin ningún tipo de justificación o cuestionamiento sobre sus alcances o limitaciones, donde la presentación de las obras-monumentos tiende a silenciar todo tipo de preguntas de los estudiantes (OTERO, FANARO, CÓRICA, LLANOS, SUREDA, PARRA, 2013; CÓRICA, 2016).

Para enfrentar esta problemática la TAD propone un conjunto de instrumentos teóricos y dispositivos didácticos, tales como las “Actividades de estudio e investigación” (AEI) y los “Recorrido de estudio e investigación” (REI) que tienen por objetivo instalar en el aula el *paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo* (PICM), que permitiría romper con la concepción atomizada y sin sentido de la matemática, para dar lugar a estudiar diversas Organizaciones Matemáticas (OM) según los saberes del estudiante y promover las actitudes necesarias para formar ciudadanos democráticos y críticos, que según Chevallard, son las de *problematización, herbartiano, procognitivo, exotérico y enciclopedista ordinario* (CHEVALLARD 2012; OTERO, FANARO, CÓRICA, LLANOS, SUREDA, PARRA, 2013).

En los niveles secundario y universitario se han experimentado, diseñado y evaluado en forma aislada y controlada varios REI y AEI. En Argentina, en particular en el trabajo de PARRA y OTERO (2018) se mencionan tales implementaciones y sus características principales. Entre esas investigaciones, en el marco de la TAD, es de destacar la realizada por DONVITO, OTERO y SUREDA (2014), quienes analizaron las actitudes propias de la PICM a partir de los protocolos de estudiantes de matemática, que participaron en un REI. Utilizando técnicas de análisis multivariado, describieron la relación entre la institución y el tipo de pedagogía utilizada en la manifestación de las actitudes, evidenciando la necesidad de un cambio en la pedagogía tradicional, pues un grupo importante de estudiantes no presentaron esas actitudes.

En particular, si nos detenemos a observar cómo se aborda la noción de función en la enseñanza tradicional o monumentalista, numerosas investigaciones señalan que se caracteriza por un trabajo algorítmico que elimina el problema como motor de generación de conocimientos y se utilizan las gráficas como un fin en sí mismo y como apoyo intuitivo del discurso del docente (RODRIGUEZ FERNANDEZ, GODINO y RUIZ HIGUERAS, 1995; HANFLING, 2000; BORSANI et al., 2013; FERRAGINA y LUPINACCI, 2015). Para afrontar lo expuesto, diversos autores (CARRILLO, 2012; BORSANI, 2013; HOHENWARTER, 2014; FERRAGINA y LUPINACCI, 2015) utilizan GeoGebra, software de geometría dinámica, para el estudio de la noción de función con los estudiantes. Este programa libre y multiplataforma, integra en forma dinámica, Geometría, Álgebra y Cálculo,

posibilitando explorar los objetos matemáticos, en múltiples registros de representación. Al respecto, FERRAGINA y LUPINACCI (2015) destacan que dicho software, posibilita interactuar con los objetos construidos en tiempo real, permitiendo el arrastre y la utilización de otras herramientas y comandos, otorgando dinamismo a las funciones como una variación entre magnitudes. Mientras que BORSANI et al. (2013) aseveran que “es una oportunidad para recuperar la noción de función como modelo para vincular el cambio y/o la variación entre las medidas de dos magnitudes” (p. 6904).

Por otro lado, se encuentran varias investigaciones (BARNBAUM, 2010; MUNAKATA y VAIDYA, 2012; MEIER, HANNULA y TOIVANEN 2018; RIZZO, DEL RÍO, MANCENÍDO, LAVICZA y HOUGHTON, 2019) que enfatizan en la importancia de trabajar con fotografía y GeoGebra para motivar a los estudiantes, lo que permite aumentar el interés y la comprensión de los contenidos matemáticos (LUDWING, JABLONSKI, CALDEIRA y MOURA, 2020). Podemos mencionar los aportes de MUÑOZ CASADO (2018) quien invitó a sus estudiantes a modelar y estudiar la geometría implícita en la arquitectura. SHARP, GAROFALO y THOMPSON (2004) proponen el estudio de pendiente y puntos de fuga a partir de diversas fotografías, concluyendo que su utilización posibilita desarrollar un fuerte sentido de autenticidad en el aprendizaje matemático. FURNER y MARINAS (2014) mencionan que, al utilizar fotografías en GeoGebra, los profesores muestran un propósito y aplicación práctica de las matemáticas, mientras que los estudiantes podrán discutir definiciones, explorar relaciones numéricas y hacer importantes conexiones matemáticas, posibilitando una mejor comprensión de los aprendizajes. En RIZZO (2016) y en RIZZO, DEL RÍO y MANCENÍDO (2019), también se ha encontrado, que utilizar GeoGebra junto a fotografías ayuda a involucrar a los estudiantes con contenido matemático relacionándolo con el arte y con el entorno que lo rodea; además de permitirles pensar de manera creativa. FURNER y YAHYA (2020), mencionan que al utilizar fotografías en GeoGebra se crean nuevos conceptos matemáticos y de vocabulario, al mismo tiempo que se motivan. Según FURNER (2019), gracias al dinamismo de GeoGebra, es posible importar fotografías a la Vista Gráfica de GeoGebra, y mediante la modelación de situaciones reales, explorar conceptos matemáticos, permitiendo un aprendizaje de las matemáticas más real y relevante.

Atendiendo a las problemáticas expuestas, se propone introducir la PICM, mediante la implementación de un REI, en un curso de 5° año de la escuela secundaria argentina, para el estudio de funciones matemáticas (polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas) propuestas en el diseño curricular (DISEÑO CURRICULAR PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA: MARCO GENERAL PARA EL CICLO SUPERIOR, 2010; DISEÑO CURRICULAR PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA 5° AÑO. MATEMÁTICA. CICLO SUPERIOR, 2011).

El REI, que denominaremos FotoGebra, parte de la pregunta: *¿Cómo resolver una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas?* Esta pregunta podría generar múltiples preguntas derivadas entre: *¿Qué fotografía elegir para “capturar” el problema?* *¿Qué es una situación problema?* *¿Cómo plantear una situación problema real a partir de una fotografía?* *¿Qué*

es una función? ¿Cuál función es adecuada para resolver el problema? ¿Qué utilidad tendría GeoGebra para resolver el problema? ¿Cómo utilizar GeoGebra?

De este modo se pretende un estudio útil, con sentido de las funciones matemáticas, en la escuela secundaria argentina, en la línea de pensamiento que menciona CHEVALLARD (2017). La pregunta generatriz que combina: una situación problemática real propuesta por los estudiantes, el uso de GeoGebra (considerado como un *media*), la fotografía, la modelización (en el sentido que le da BOSCH, GASCÓN y HIGUERAS, 2006) y la resolución matemática, colocaría a los estudiantes en una actitud de problematización pudiendo estimular en ellos el desarrollo de las actitudes propias de la PICM, deseables para formar jóvenes ciudadanos democráticos y críticos.

## 2 OBJETIVOS y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

La investigación más amplia del REI presentado propone lograr los siguientes objetivos:

### Generales

- Efectuar aportes a la educación matemática.
- Introducir en la escuela secundaria Argentina el paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo (PICM).

### Específicos

- Diseñar el dispositivo didáctico denominado “FotoGebra” en el marco de la TAD y analizar las OM relativas al concepto de función (construir el Modelo Praxeológico de Referencia) que podrían ser construidas por los estudiantes de 5° año del Instituto Nuestra Señora del Perpetuo Socorro.
- Identificar las actitudes de la PICM que los estudiantes experimentarán en el REI.
- Identificar las OM que se construyen o reconstruyen y qué utilidad les dan los estudiantes que experimentan el REI.
- Identificar las dialécticas que se evidencian en la experimentación del REI y analizar el funcionamiento de estas.
- Identificar las actitudes de la PICM manifestadas por los estudiantes que experimentan el REI.
- Explorar la incidencia de la media GeoGebra en la construcción de las OM, en la manifestación de las actitudes de la PICM y en el funcionamiento de las dialécticas, durante el REI desarrollado.

- Explorar la vinculación entre las dialécticas y las actitudes identificadas de la PICM cuando se implementa el REI mencionado.

Las preguntas de investigación que guiarán la misma son:

¿Cuáles OM relativas a las funciones matemáticas pueden ser construidas o reconstruidas por los estudiantes de un 5º año del INSPS que experimentan el REI “FotoGebra”? ¿Cuáles actitudes de la PICM pondrían en juego los estudiantes al experimentar el REI “FotoGebra”? ¿Cuáles OM construyen o reconstruyen y qué utilidad les dan, los estudiantes del INSPS que experimentan el REI “FotoGebra”? ¿Cuáles son las actitudes de la PICM que manifiestan los estudiantes de 5º año del Instituto Nuestra Señora del Perpetuo Socorro que experimentan el REI “FotoGebra”? ¿Cuáles son las dialécticas que se evidencian en el desarrollo del REI? ¿Qué incidencia tiene el *media* GeoGebra en la construcción de las OM, en la manifestación de las actitudes de la PICM y en el funcionamiento de las dialécticas, durante el REI? ¿Existe vinculación entre las dialécticas y las actitudes identificadas de la PICM cuando se implementa el REI mencionado?

### 3 MARCO TEÓRICO

Se utiliza como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que propone incorporar el paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo (PICM) (OTERO, FANARO, CORICA, LLANOS, SUREDA y PARRA, 2013) para sustituir la enseñanza tradicional de inventariar saberes sin sentido, a través de preguntas en sentido fuerte, que generarán la búsqueda de respuestas *consistentes* a interrogantes que no les son ajenos, llevándolos a construir una variedad de praxeologías matemáticas durante la indagación (CHEVALLARD, 1985, 1999, 2001, 2002, 2004, 2006, 2007, 2012, 2013a, 2013b, 2015, 2017).

Para Chevallard (1999), las matemáticas son una práctica humana antropológica y para describirla utiliza la noción de *praxeología: praxis o saber hacer* que consta de los tipos de tareas y técnicas para resolverlas, y el *logos o saber*, que involucra los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan (tecnologías) y las teorías (CORICA y OTERO, 2009). Distingue además la *praxeología u organización matemática* (OM) y la praxeología u *organización didáctica* (OD) del profesor. En particular, el conjunto de praxeologías que se considera comúnmente como el conocimiento, capacidad o competencia, que una persona tiene a su disposición y que puede activar en un momento dado y bajo ciertas condiciones y

restricciones dadas (CHEVALLARD, 2013b) se denomina *equipamiento praxeológico*.

La TAD, con el objetivo de desplazar el PVO, propone implementar en las aulas los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). Estos dispositivos didácticos, a través del estudio de una determinada cuestión  $Q_0$  denominada generatriz del proceso de estudio, propicia la aparición de otras nuevas cuestiones derivadas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  que no están atadas a una sola disciplina, sino a las necesarias para dar respuesta a las cuestiones planteadas (investigación codisciplinar), favoreciendo de este modo la construcción del conocimiento científico, que se formaliza mediante un esquema herbartiano desarrollado ( $[S(X;Y;Q) \rightarrow M] \rightarrow R \heartsuit$ ) donde  $M = \{R1\heartsuit, R2\heartsuit, R3\heartsuit, \dots, Rn\heartsuit, On+1, \dots, Om\}$  es el Medio, constituido por respuestas  $R\heartsuit$  a la cuestión, existentes en las instituciones de la sociedad, y *otras obras*  $O_{n+1} O_m$ , de cuestiones *engendradas* por el estudio de  $Q$  (generatriz).

Para ello, es importante desarrollar un conjunto de gestos didácticos interrelacionados, que los llamaremos actitudes de la PICM, necesarias, según Chevallard, para formar ciudadanos democráticos y críticos (CHEVALLARD, 2012). Estas actitudes son: *Problematización*, es la de reconocer la “problematicidad” de las situaciones vividas u observadas, de levantar cuestiones al respecto. Da paso a la cuestión  $Q$  del esquema herbartiano y las cuestiones engendradas. *Herbatiana*, consiste en entregarse al estudio, sin evitar ninguna cuestión  $Q$  como tal. *Procognitiva*: nos permite proyectarnos hacia adelante, hacia los conocimientos útiles para la investigación en curso. *Exotérica*: es estar siempre estudiando para aprender o verificar lo que se cree saber, enfrentar la ignorancia. *Enciclopedista ordinario (normal)*: considerar el campo praxeológico que surja sea éste de cualquier disciplina (CHEVALLARD 2013a; OTERO, FANARO, CÓRICA, LLANOS, SUREDA, PARRA, 2013).

Asimismo, para conducir un REI se requiere activar una serie de gestos didácticos denominados *dialécticas*. Por ejemplo, la *dialéctica del estudio y la investigación* que combina el estudio de praxeologías con la formulación de nuevas preguntas, estas a su vez determinan una nueva investigación que generará nuevos estudios; la *dialéctica del individuo y colectivo*: se reparten las responsabilidades y se asignan tareas individuales (autonomía), para contribuir al proceso grupal de elaboración de una respuesta (sinonimia); *análisis y síntesis praxeológica*: para estudiar una obra se analiza y reconoce lo relevante, es indispensable y útil un análisis didáctico, se enseñan y aprende a la vez; *tema y fuera de tema*: en una investigación surgirán temas que estén fuera de la ella, pero dada su utilidad será necesario su estudio; *paracaidista y las trufas*: explorar áreas amplias del saber y también rastrillar para focalizar sobre las obras que harán progresar el REI; *cajas negras y blancas*: se prioriza el contenido emergente de la

investigación, el procognitivo, siendo necesario esclarecer cajas negras que están afuera del diseño curricular tradicional y oscurecer cajas blancas sin utilidad y funcionalidad a la investigación; *media (sistema de información)-medio(de estudio)*, (o de la conjetura y de la prueba), pone el acento en que el medio es construido por la clase (quien evalúa el grado de incertidumbre de una afirmación dada) y que el profesor es un elemento más de la media, como lo pueden ser los libros, artículos de investigación, apuntes de clase y todo aquello que ingresa al medio para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales; *lectura y escritura*: lectura activa de las respuestas etiquetadas para reescribirlas, desarrollarlas e interpretarlas en función del problema; *difusión y recepción*: se difunde y defiende la respuesta desarrollada ante la comunidad. Estos saberes o saberes-hacer, son el motor de una enseñanza por REI (PARRA y OTERO, 2018).

Por último, cabe destacar que, para identificar y describir las obras matemáticas y extra-matemáticas que podrían ser estudiadas durante el proceso de búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz y preguntas derivadas, el investigador realiza una construcción denominada *Modelo Praxeológico de Referencia* (MPR) (BOSCH y GASCÓN, 2014), lo llama modelo epistemológico de referencia). Este modelo es una hipótesis de partida, provisoria y abierta, pues dependerá de las praxeologías que surjan durante el REI y la institución donde se lleve adelante (CHEVALLARD, 2013b; GASCÓN, 2014).

#### **4 METODOLOGÍA**

La investigación que se realizará será de tipo cualitativa y la metodología de carácter exploratoria, descriptiva e interpretativa, pues el problema de investigación no ha sido abordado con anterioridad (HERNANDEZ, FERNÁNDEZ y BAPTISTA, 2014). Para realizar la descripción del fenómeno en estudio se utilizará la *técnica de observación participante* pues el profesor del curso será el investigador. La *observación* se realizará en las clases en las que se implementará el dispositivo didáctico (MARRADI, ARCHENTI y PIOVANI, 2007).

La investigación más amplia comprenderá dos partes. Una primera, anterior a la experimentación del REI, que consiste en: (i) un análisis de los posibles recorridos que se podrían construir o reconstruir a partir de  $Q_0$ , mediante la construcción de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR), instrumento metodológico propio de la TAD (SERRANO, 2013) y las posibles OM relativas a las funciones matemáticas que podrían construir o reconstruir y su utilidad, (ii) un estudio en relación a las actitudes de la PICM que posibilitará

favorecer en los estudiantes el desarrollo del REI y (iii) el diseño del dispositivo. Esta parte pretende dar respuesta a las dos primeras preguntas de investigación. La segunda, corresponde a la implementación del REI, su descripción y su análisis para lograr dar respuesta a las restantes preguntas de investigación.

## 5 DISEÑO y PLANIFICACIÓN DEL REI

**Participantes y contexto institucional.** El proceso de implementación piloto del dispositivo se realiza durante el año 2021 en una escuela secundaria del partido de Quilmes, Región Educativa 4 de la provincia de Buenos Aires, Argentina en un curso de matemática de 5° año, en la modalidad Humanidades de la ESS con un total de aproximadamente 40 estudiantes de entre 16 y 17 años. La implementación del REI propiamente dicho se hará en un curso de similares características.

**Concurso FotoGebra y diseño del REI.** Se diseña un dispositivo didáctico REI que es la adaptación de un concurso denominado FotoGebra ([www.fotogebra.org](http://www.fotogebra.org)) de modo que pueda ser llevado a un aula de clase de matemática.

El concurso nace con la intencionalidad de despertar el interés de los estudiantes hacia el estudio de la matemática y al mismo tiempo de posibilitar la incorporación de las TIC en el aula.

Se inicia con la competencia de estudiantes pertenecientes a dos instituciones educativas de Quilmes, Provincia de Buenos Aires (Argentina) y en el año 2016, se hizo eco en otras instituciones educativas del país. En 2018, ya se encontraban participantes de otros países limítrofes y en la actualidad ya es de carácter internacional.

Los participantes, de manera individual o en grupos de hasta tres personas, presentan una hoja dinámica construida en GeoGebra, donde se aloja el trabajo a evaluar. El mismo consiste en la modelización matemática de algún objeto, animal, persona u otro, en la imagen de una fotografía; La modelización se realiza apoyándose además en el software GeoGebra, para dar respuesta a una situación problemática real creada por el participante.

GeoGebra es un software libre de geometría dinámica y multiplataforma, diseñado para la enseñanza de la matemática y de otras disciplinas. Las múltiples herramientas, comandos y vistas que ofrece, permiten abordar todas las áreas de la matemática y hacer construcciones que en lápiz y papel no se logran, siendo esto imprescindible en la enseñanza y aprendizaje de la matemática (CARRILLO, 2012; HOHENWARTER, 2014; HOHENWARTER, KOVÁCS *et*

al. 2019).

Asimismo, la exploración con GeoGebra de imágenes tomadas de la realidad permite la construcción de diversos modelos, y es una potente estrategia didáctica en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (RIZZO y COSTA, 2020; RIZZO, 2016, 2019, 2020).

Esta propuesta, de inscripción gratuita que tiene sólo fines educativos, se realiza con una periodicidad anual y de forma ininterrumpida desde su comienzo.

En función del año académico que curse el participante, se establecieron cuatro categorías. En la primera participan alumnos de 1º, 2º y 3º (de entre 12 a 14 años), mientras que en la segunda de 4º, 5º, 6º y 7º de Escuela Secundaria (más de 15 años); en la tercera categoría estudiantes de 1º y 2º año y en la cuarta de 3º y 4º año de Institutos de Formación Docente.

Las bases del concurso son publicadas en las redes sociales (<https://www.facebook.com/FotoGebra/>, <https://www.instagram.com/fotogebra/>, <https://www.youtube.com/c/FotoGebraRizzoK>, <https://www.geogebra.org/u/fotogebra>) y en el sitio web del mismo <https://www.fotogebra.org/>.

Además, a partir de la presentación de las bases, cada 14 de marzo (día internacional de las matemáticas) y hasta la entrega de las fotografías (fines de noviembre), se realizan diversas charlas informativas y talleres, tanto presenciales como virtuales, abocados al uso de GeoGebra, para estudiantes y docentes que deseen asistir. Finalizado el período de presentación de trabajos, se realiza una muestra virtual mediante la publicación de estos en el Facebook del concurso (<https://www.facebook.com/FotoGebra/>) y el público en general puede votar por su obra favorita. La más elegida recibe una mención especial. Finalmente, durante el período de tiempo que dura la muestra, se convoca a varios especialistas en la temática, que evalúan las obras presentadas y se anuncian los ganadores de la edición.

**Implementación del REI.** El REI se iniciará con la pregunta *¿Cómo resolver una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas?* Se llevará a cabo durante un semestre, en el curso especificado anteriormente, con dos encuentros semanales. Los estudiantes, en grupos de hasta tres integrantes intentarán responder la pregunta generatriz. Para ello podrán decidir qué fotografía tomar, cuál situación problema real plantear que la involucre, para luego, utilizando GeoGebra, buscar respuesta mediante un modelado matemático, construyendo o reconstruyendo una OM relativa a funciones matemáticas.

Durante el desarrollo del REI, los estudiantes, con el equipamiento praxeológico que poseen y con las OM que construyan, proporcionarán respuestas a las situaciones derivadas que surjan. Periódicamente cada grupo difundirá los avances y entre todos, junto al profesor,

debatirán y determinarán el posible camino a seguir para buscar respuesta a la pregunta generatriz. En tanto, el profesor que dirige la investigación podrá decidir de apartar tal o cual desarrollo posible, en una cierta etapa del REI (Chevallard, 2009).

Luego de la implementación y a partir de los registros recolectados (registros de audio, notas del profesor, protocolos elaborados por los estudiantes, tanto en formato papel como digital y en el software) se realizará el análisis. Se identificarán en ellos, las OM construidas y reconstruidas. Además, se detectarán las actitudes de la PICM desarrolladas por los estudiantes durante el REI, utilizando las *categorías de análisis e indicadores* propuestos por DONVITO et al (2014). Luego, para dar respuesta a las demás preguntas de investigación, se identificará en los registros el funcionamiento de las dialécticas. Para ello se construirán indicadores didáctico-matemáticos tales como los propuestos en PARRA, OTERO (2017) y adaptados a este caso. A continuación, y para dar respuesta a la anteúltima pregunta de investigación, se realizará un análisis exploratorio y descriptivo de la incidencia de GeoGebra como *media* en la construcción de las OM, de las actitudes de la PICM que manifiestan los estudiantes que experimentan el REI y de las dialécticas desarrolladas. Estos análisis se expondrán en tablas de doble entrada para permitir visualizar lo encontrado. Finalmente, a partir de los datos obtenidos y en relación con las actitudes de la PICM y de las dialécticas, se explorará y analizará si existe vinculación entre las dialécticas y tales actitudes.

## 6 IMPLEMENTACIÓN PILOTO DEL REI

En particular en este escrito abordaremos parte del primer objetivo que persigue la investigación: “Diseñar el dispositivo didáctico denominado “FotoGebra” en el marco de la TAD”. Para ello se lleva adelante una implementación piloto del REI, el último semestre del 2021, que se inicia con la pregunta generatriz propuesta por el profesor. Los estudiantes participantes trabajaron sobre la pregunta generatriz logrando los siguientes resultados, a saber:

- Producción de tapabocas (<https://www.geogebra.org/m/njnvktxb>),
- El circo (<https://www.geogebra.org/m/eavpb6qn>),
- Reparando la sombrilla (<https://www.geogebra.org/m/ju9cpgmb>),
- El carpincho en problemas (<https://www.geogebra.org/m/dexc7hh6>),
- Nueva ventana (<https://www.geogebra.org/m/f2n4ytkq>),
- La montaña polinómica (<https://www.geogebra.org/m/ev9bvkpv>),
- Silla de Marisol (<https://www.geogebra.org/m/xjhzs4r5>),

Decorando curvas (<https://www.geogebra.org/m/pbwhta6w>),  
Skate park Word de Quilmes (<https://www.geogebra.org/m/dsxvad8a>),  
Nuevo ventanal (<https://www.geogebra.org/m/aca888et>),  
Réplica de una copa (<https://www.geogebra.org/m/hwmfybsg>),  
El tinglado (<https://www.geogebra.org/m/hwmfybsg>).

Algunos de estos trabajos se presentaron además en la VI edición del concurso FotoGebra en la categoría II: <https://www.geogebra.org/m/pvyhrwgw>.

El recorrido realizado por los estudiantes para arribar a los trabajos presentados y dar respuesta a la pregunta, permitió hacer ajustes para la implementación definitiva del REI.

El recorrido de la propuesta piloto se detalla muy brevemente, a continuación. Para ello se formulan cuatro etapas, que no se sucedieron linealmente, sino que algunas de ellas se solapan e incluso interactuaron entre sí. Algunas de las etapas, contaron con uno o varios formularios que respondieron los participantes, que oficiaron de guía y/o de alojamiento de información para posterior análisis.

### ***Etapas 1: Pregunta Generatriz***

Se comenta a toda la clase la propuesta y se comparte la pregunta generatriz *¿Cómo resolver una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas?* para debatir en forma conjunta.

Más tarde, luego de dejar el tiempo necesario para pensar/discutir la pregunta generatriz, se ofrece un enlace que da acceso a un formulario y se les solicita que formen grupos para abordarlo: <https://forms.gle/Jj1Q1aVNuYpBUnDf9>

Luego de la discusión en los pequeños grupos, se comparte con toda la clase lo realizado, finalizado dicho proceso se procede a completar lo generado en el interior de cada grupo con un nuevo debate.

En esta etapa, a partir de la pregunta generatriz, se espera la exploración y formulación de preguntas derivadas sobre el tema. Además, se indaga respecto a las OM estudiadas, haciendo hincapié en las OM funciones y las referidas al conocimiento y uso del software GeoGebra.

Finalmente, y dependiendo de las dudas surgidas, se los incentiva con la visualización de un video “Experiencia en primera persona”, de participantes del concurso FotoGebra, donde comentan a grandes rasgos su participación en el certamen ( <https://youtu.be/Gcj2g5oRkC8> o <https://youtu.be/rmgZ4T5ciE> )

### ***Etapas 2: Trabajo con fotografías***

Los estudiantes toman fotografías en las que pueden advertir de algún modo, una situación problema y que pueda modelarse mediante alguna "función matemática". Colocan un lema a su foto y bosqueja la situación problemática. Finalmente, ingresan y responden lo solicitado en <https://forms.gle/pm7bHUayxYiLtKfo7>

### ***Etapa 3: Redacción final situación problemática***

En esta etapa, se trabaja con la fotografía elegida por el grupo y la redacción del problema. En particular, se desea brindar apoyo sobre la redacción correcta del primer borrador de la situación problemática. Luego de la discusión grupal, completan un nuevo formulario: <https://forms.gle/pQukQhXmZZWSaFfr8>

Debido a las dificultades surgidas en la redacción de la situación problemática, se les brinda ejemplos tomados del concurso FotoGebra del cual se adaptó el REI, tanto de manera oral como luego cuando acceden a un formulario: <https://forms.gle/gYbqPmqkfP9U4sf7>

### ***Etapa 4: Resolución de la situación problemática: ¡Manos a la obra!***

Luego de la elección de la cuestión a abordar y la redacción de la situación problemática, comenzó la búsqueda de respuestas a las preguntas planteadas que atrajeron su atención, donde se reencontraron con algunas obras matemáticas estudiadas con anterioridad y otras nuevas.

En esta etapa utilizan GeoGebra, y cabe destacar que aquí, fue necesario proporcionar soporte en cuanto al uso de herramientas y comandos de este software. Una de las acciones llevadas adelante, fue la de proporcionar un enlace para acceder a una clase en GeoGebra Classroom (<https://www.geogebra.org/classroom/n72djmdf>). Una vez en ella, tenían acceso a cuatro bloques de actividades. La primera serie de actividades fue concebida para explorar comandos y herramientas. En un segundo apartado de actividades, los estudiantes se encuentran con varias imágenes, que se propone puedan insertar en la vista gráfica de GeoGebra para luego modelizar. Cabe señalar que esto fue totalmente nuevo para ellos, por lo que, la docente abordó las cuestiones "técnicas", guiando paso a paso, para la resolución de esta. En la tercera instancia, la imagen ya se encuentra en la vista gráfica, y se pretende que los estudiantes puedan dar respuesta a la situación problemática planteada, utilizando las herramientas que se muestran. Finalmente, el último bloque de actividades tiene la intención de ir un poco más allá. Se desea que diseñen sus propias construcciones, con la imagen de su autoría, tomada de su entorno cotidiano y la resuelvan. Para esto último, además del applet de GeoGebra, se proporciona un GeoGebra Notas, que permite adjuntar cualquier tipo de archivo.

Libro: <https://www.geogebra.org/m/dcerue3w>

Clase: <https://www.geogebra.org/classroom/n72djmdf>

Es importante comentar que, en cada clase se ofrecieron espacios para compartir el saber investigado entre sus compañeros de grupo y también con el resto. Además, esto se institucionaliza, mediante una exposición grupal una vez por semana. Se pretende que cada grupo realice mejoras y sugerencias al trabajo de sus compañeros, así como interiorizarse de los mismos.

Asimismo, es de destacar que, cuando se realizó la puesta en común de los trabajos finales, los estudiantes realizaron una valoración de los mismos a través de una “Rúbrica valoración de obras” (Figura 1) y manifestaron querer continuar con la profundización de uno de los trabajos propuestos: El tinglado (<https://www.geogebra.org/m/hwmfybsg>), cuestión que no se pudo realizar por falta de tiempo, ya que la semana siguiente concluía el ciclo lectivo 2021.

**Figura 1:** Rúbrica valoración de obras.

Fotografía *	1	2	3
Estética	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Equilibrio Compositivo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Originalidad	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Dinamismo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Encuadre Fotográfico	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Situación Problemática *	1	2	3
Creatividad	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Conocimiento /contenid...	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Manejo de GeoGebra x2	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Fuente: Los autores.

Finalmente, para recabar información respecto de lo vivido, se les ofrece una encuesta final: <https://forms.gle/5gZ5pyk7hWJ72zZ49> .

En el cuadro 1, se resumen las actividades desarrolladas por el docente y las acciones de los estudiantes, para cada etapa de la implementación piloto del REI, y en el cuadro 2, se muestran las actividades que estuvieron presentes durante toda la implementación.

**Cuadro 1 – Síntesis de las Etapas del REI. Implementación piloto.**

Clase /horas	Organización didáctica del profesor	Acciones de los estudiantes
<b>Etapa 1: Pregunta Generatriz</b>		
1 2 hs	-Presentación de la pregunta generatriz. - Guía. -Proporciona un enlace a un formulario/encuesta. <a href="https://forms.gle/Jj1Q1aVNuYpBUnDf9">https://forms.gle/Jj1Q1aVNuYpBUnDf9</a>	- Discuten grupalmente. -Exploran y formulan preguntas derivadas sobre el tema. -Responden a preguntas del formulario.
2 1 h	- Habilita espacios de intercambio - Toma nota de las preguntas derivadas. - Se solicita para la próxima clase, fotografías de una situación real que deseen resolver mediante su ayuda.	- Comentan las preguntas/dudas surgidas de la pregunta generatriz. -Acuerdan el camino a seguir.
3 2hs	-Solicita compartir las fotografías y discutir la pertinencia o no de las mismas (si no han podido tomar una fotografía de su autoría, se los invita a recorrer la institución y tomar algunas) -Proporciona enlace a formulario que oficia de guía y registro, para análisis y elección de la fotografía con la que trabajaran. <a href="https://forms.gle/pm7bHUayxYiLtKfo7">https://forms.gle/pm7bHUayxYiLtKfo7</a> -Escucha atenta a las discusiones grupales.	-Comparten en el grupo de trabajo, las fotografías tomadas. - Discuten respecto al porqué de la elección y la observación o no de “funciones matemáticas” - Eligen una fotografía para trabajar.
4 1h	-Habilita espacios de intercambio -Solicita compartir con toda la clase lo realizado en cada grupo. - Coordina las discusiones e intercambios.	-Un líder comenta las fotos tomadas por los integrantes y comparte la decisión tomada por el grupo sobre la elección de la fotografía a problematizar. -La clase escucha y propone/sugiere modificaciones o no, argumentando su postura.
<b>Etapa 2: Trabajo con fotografías</b>		
5 2 hs	- Propone el trabajo con la fotografía elegida por el grupo y la redacción del problema. -Proporciona enlace a un formulario: <a href="https://forms.gle/pQukQhXmZZWSaFfr8">https://forms.gle/pQukQhXmZZWSaFfr8</a> - Indaga respecto a la redacción de la situación problemática y su viabilidad. - Escucha atenta a las discusiones grupales.	- Discuten grupalmente - Eligen un “lema” o título. - Redactan posibles preguntas/situaciones problemáticas a resolver mediante la fotografía. - Investigan cómo redactar el planteo a una situación problemática. - Acuerdan trabajar con una de las propuestas.
6 1h	- Habilita espacios de intercambio - Solicita compartir con toda la clase lo realizado en cada grupo. - Coordina las discusiones e intercambios, sugiere y guía, haciendo hincapié en la pregunta formulada (Por ej. ¿Es evidente la respuesta a la pregunta formulada? ).	-Un líder comenta el lema y la situación problemática elegida por los integrantes y comparte la decisión tomada por el grupo y las razones de esta. -La clase escucha y propone/sugiere modificaciones o no, argumentando su postura. -El grupo discute las sugerencias recibidas y su viabilidad o no.
<b>Etapa 3: Redacción final situación problemática</b>		
7 2 hs	- Proporciona un enlace a un nuevo formulario, en base a lo discutido en la clase anterior <a href="https://forms.gle/gYbqPmqkfp9U4sf7">https://forms.gle/gYbqPmqkfp9U4sf7</a>	- Discuten los ejemplos proporcionados y revisan la redacción de la situación problemática y el lema elegido. - Reescriben la situación problemática a resolver. - Comparten con la clase la nueva redacción y ajustan modifican según sugerencias recibidas.
<b>Etapa 4: Resolución de la situación problemática: ¡Manos a la obra!</b>		
8 1h	- Propone el trabajo con la fotografía elegida por el grupo para dar respuesta a la situación problemática. - Responde consultas/ guía.	- Investigación y búsqueda de respuestas a la pregunta planteada, en forma grupal. - Comparten avances, minutos previos al cierre de la clase.

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proporciona medios para visualizar el video de una experiencia. <a href="https://youtu.be/Gcj2g5oRkC8">https://youtu.be/Gcj2g5oRkC8</a></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Visualizan y discuten la experiencia</li> </ul>
9 2 hs	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proporciona un enlace para acceder a una clase en GeoGebra classroom <a href="https://www.geogebra.org/classroom/n72djmdf">https://www.geogebra.org/classroom/n72djmdf</a></li> <li>- Realiza exposición a toda la clase, para brindar ayuda respecto de creación de perfil, usos de herramientas y comandos del software GeoGebra (1° apartado)</li> <li>- Monitorea el avance de los estudiantes y guía la realización de las tareas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Crean perfil en GeoGebra</li> <li>- Se familiarizan con el software.</li> <li>- Exploran herramientas y comandos.</li> <li>- Realizan las actividades del 1° apartado: “Comenzamos” y “Hola”.</li> </ul>
10 1h	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Realiza en forma conjunta con toda la clase, la 1° tarea del 2° apartado “Modelizar”.</li> <li>- Monitorea el avance de los estudiantes y guía la realización de la tarea.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Insertan en la vista gráfica de GeoGebra la fotografía proporcionada en la 1° tarea y la modelan.</li> <li>- Preguntan acerca de herramientas y uso de GeoGebra.</li> </ul>
11 2 hs	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Monitorea el avance de los estudiantes y guía la realización de la tarea.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reencuentran diversas funciones matemáticas estudiadas y discuten características de estas.</li> <li>- Modelizan las luces de una fragata (2° tarea del 2° apartado).</li> <li>- Discuten grupalmente lo abordado, en función de su utilidad para la resolución de la actividad planteada por ellos inicialmente.</li> <li>- Comparten con la clase las conclusiones a las que arribaron.</li> <li>- Continúan con la investigación para dar respuesta a sus preguntas.</li> </ul>
12 1h	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Realiza en forma conjunta con toda la clase, la modelización de un vaso, utilizando diferentes comandos y herramientas para arribar al mismo objeto 3D.</li> <li>- Monitorea el avance de los estudiantes y guía la realización de la tarea.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Comienzan a trabajar con la vista 3D.</li> <li>- Modelizan un vaso (3° tarea del 2° apartado).</li> </ul>
13 2 hs	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Monitorea el avance de los estudiantes y guía la realización de la tarea.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Modelizan un envase de perfume (4° tarea del 2° apartado).</li> </ul>
14 1h	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Coordina las discusiones e intercambios, sugiere y guía.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Discuten grupalmente lo abordado hasta el momento, en función de su utilidad para la resolución de la actividad planteada por ellos inicialmente.</li> <li>- Comparten con la clase las conclusiones a las que arribaron.</li> <li>- Continúan con la investigación para dar respuesta a sus preguntas.</li> </ul>
15 2hs	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Monitorea el avance de los estudiantes y guía la realización de la tarea del tercer apartado.</li> <li>- Inicia el debate en torno a la relación de proporción entre las dimensiones reales de los objetos fotografiados y la de los que se encuentran en la fotografía que los representa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resuelven la situación problemática propuesta en el 3° apartado (altura máxima del torso de Joaquín).</li> <li>- Discuten la importancia de establecer una escala entre la fotografía y la imagen real.</li> <li>- Analizan la mejor estrategia para contar con una escala de referencia (realizar una nueva fotografía considerándola, investigar medidas reales de objetos que se encuentran sobre la fotografía, entre otros) y la necesidad o no para dar respuesta a su pregunta.</li> </ul>
16	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Coordina las discusiones e intercambios, sugiere y guía.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Comparten con la clase la estrategia elegida y los motivos de su elección.</li> </ul>

1 h		- Continúan con la investigación para dar respuesta a sus preguntas.
17 2 hs	- Ofrece espacio (3º apartado) para desarrollar la situación problemática y arribar a una respuesta posible. - Monitorea el avance de los estudiantes y guía la realización de la tarea.	-Diseñan sus propias construcciones, con la imagen de su autoría, tomada de su entorno cotidiano, para dar respuesta a la pregunta planteada inicialmente. -Comparten con la clase los avances.
18 1h	- Coordina las discusiones e intercambios, sugiere y guía.	-Comparten con la clase los avances. - Continúan con la investigación para dar respuesta a sus preguntas
Tres semanas	Se repite el proceso hasta llegar a la respuesta. - Proporciona una rúbrica de evaluación: <a href="https://forms.gle/dUVDKL7QM6p1oC4w6">https://forms.gle/dUVDKL7QM6p1oC4w6</a> -Se exponen los trabajos para su valoración. -Coordina la elección del trabajo a profundizar, por toda la clase.	Continúan con la investigación para dar respuesta a sus preguntas. - Se realiza una síntesis y devolución de cada trabajo. -Analizan la viabilidad de desarrollar un trabajo en particular.

Fuente: Los autores.

**Cuadro 2** – Actividades del docente y estudiantes, presente durante todas las Etapas del REI del Cuadro 1.

Clase /horas	Organización didáctica del profesor	Acciones de los estudiantes
Todas las clases	-Coordina las discusiones e intercambios, sugiere y guía.	- Comparten el saber investigado entre sus compañeros de grupo en cada encuentro y también con el resto de la clase, mediante una exposición una vez por semana.
	- Se exponen los trabajos para su valoración. - Coordina las discusiones e intercambios, sugiere y guía.	- Se realiza una síntesis y devolución de cada trabajo. - Justifican valoración y lo comenta para toda la clase.
	- Guía el proceso de investigación.	-Discusión grupal y acuerdos. -Investigación y búsqueda de respuestas a la nueva pregunta formulada (inicio)

Fuente: Los autores.

## 5 REFLEXIÓN FINAL

Se presentó la propuesta de un Recorrido de Estudio e Investigación, su diseño, sus objetivos, preguntas de investigación y una breve descripción de las etapas ocurridas durante una implementación piloto. Los resultados que se sintetizaron en los cuadros 1 y 2, servirán de guía para: ajustar las distintas etapas del REI, probar formularios o cuestionarios de recolección de datos, realizar mejoras en los mismos, determinar la aceptabilidad y viabilidad de la experiencia en la institución donde se realizará el REI, y establecer aspectos metodológicos de la investigación propiamente dicha.

Finalmente, hay que mencionar que se espera que los aportes que se vayan encontrando y difundiendo de esta investigación tengan un impacto no sólo en el ámbito educativo sino también en el contexto social desnaturalizando la inutilidad de los saberes

matemáticos y permitiendo el desarrollo de ciudadanos cuestionadores del mundo. Los resultados permitirían ser base para generar estrategias educativas que desarrollen en los jóvenes, actitudes de la PICM, anhelando que tanto el ciudadano futuro como el actual se conviertan en herbartianos. Además, será deseable compartir con demás docentes/investigadores el dispositivo didáctico elaborado que puede ser implementado en distintos niveles educativos, reformulando la pregunta generatriz que involucre: un problema determinado, la fotografía, GeoGebra y la construcción de organizaciones matemáticas y/o de otras disciplinas.

## REFERENCIAS

- BARNBAUM, B. The art of photography: An approach to personal expression. San Rafael, CA: RockynookBragg, L. y Nicol, C. (2011). Seeing mathematics through a new lens: using photos in the mathematics classroom, **Australian Mathematics Teacher**, v. 67, n. 3, p. 3-9, 2010.
- BORSANI, V., CEDRÓN, M., CICALA, R., DI RICO, E., DUARTE, B., y SESSA, C. La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica. En: CIBEM,7, 2013. Montevideo. **Actas del VII CIBEM**. Montevideo: FISEM, 6901-6908. 2013.
- BOSCH, M.; GARCÍA, F.; GASCÓN, J. y RUIZ HIGUERAS, L. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. **Revista Educación Matemática**, 18(2), p. 37-74. 2006.
- CARRILLO, A. El dinamismo de GeoGebra. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 29, n 1, p 9-22, 2012.
- CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné**. Paris: La Pensée Sauvage. Chevallard, Y. (1991). La transposición Didáctica, Del saber sabio al saber enseñado. Montevideo. Aiqué, 1985.
- CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, 19(2), p. 221-266, 1999.
- CHEVALLARD, Y. Aspectos problemáticos de la formación docente [en línea], **XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas**, Huesca. 2001. Disponible en: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC\\_2001\\_-\\_Osca.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001_-_Osca.pdf) Acceso el: 1 febrero de 2023.
- CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude. Écologie & régulation**. En J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), Actes de la XI école d'été de didactique des mathématiques. p. 41-56. Grenoble: La Pensée sauvage. 2002a.

CHEVALLARD, Y. **Les mathématiques dans les formations universitaires: un schéma alternatif.** Trabajo presentado en el seminario de Mathématiques et ciencias humanas de la Faculté des sciences de Luminy (Université de la Méditerranée), 2002b. Disponible en: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=55](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=55). Acceso el: 1 febrero de 2023.

CHEVALLARD, Y. Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. **Journées de didactique comparée 2004**, Lyon, 3-4 mai 2004, 2004. Disponible en: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=4](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=4) Acceso el: 1 febrero de 2023.

CHEVALLARD, Y. **Steps towards a new epistemology in mathematics education.** En Bosch, M. (Ed.) Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4). p. 21-30. Barcelona: FUNDEMI-IQS, 2006.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz Higuera, A. Estepa y F. J. García (Eds.), Sociedad, **Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria**. v. 7, n. 1, p.20-40, 2014. Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico p.705-746. Universidad de Jaén. 2007. Disponible en: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id\\_rubrique=8](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8) Acceso el: 1 febrero de 2023.

CHEVALLARD, Y. **Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement.** Journal du séminaire TAD/IDD, 2012. Disponible en: <http://www.aixmrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fdf/2011-2012/journal-tad-idd2011-2012-7.pdf> Acceso el 30 de enero de 2023

CHEVALLARD, Y. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 2, p.161-182, 2013a. <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.26>

CHEVALLARD, Y. **Éléments de didactique du développement durable.** Leçon 3. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/> Acceso el 30 de enero de 2023b.

CHEVALLARD, Y. **Un Programme de Recherche: Bits And Pieces.** Journal Du Séminaire TAD/IDD. Section 1. p. 18-01, 2013c. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-1.pdf> Acceso el 30 de enero de 2023

CHEVALLARD, Y. **Des Questions?** Journal Du Séminaire TAD/IDD. Section 4. p. 12-04, 2013d. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-4.pdf> . Acceso el 30 de enero de 2023

CHEVALLARD, Y. **La Matemática y el mundo:** Educación y Didáctica: Una tensión esencial. p.129. En: La Matemática en la escuela, por una revolución epistemológica y didáctica. Libros del Zorzal, Buenos Aires. 2013e.

CHEVALLARD, Y. **Teaching Mathematics in Tomorrow's Society:** Case for an Oncoming

Counter Paradigm. En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, p. 173-187. Cham, Suiza: Springer. 2015.

CHEVALLARD, Y. **¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria?** Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, v. 20, n. 1, p.159–169, 201.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas.** El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE/Horsori, 1997.

CORICA, A. R.; OTERO, M. R. Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 12, n.3, 2009. Disponible en: <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/113761> Acceso el 30 de enero de 2023

CORICA, A. R. **Enseñanza por Investigación en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico:** Una propuesta para estudiar las funciones a trozos.- 1a ed. - Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2016. Disponible en: [https://www.researchgate.net/profile/Ana-Corica/publication/311923286\\_Ensenanza\\_por\\_Investigacion\\_en\\_el\\_marco\\_de\\_la\\_Teoria\\_Antropologica\\_de\\_lo\\_Didactico\\_Una\\_propuesta\\_para\\_estudiar\\_las\\_funciones\\_a\\_trozos/links/5862aeaa08ae329d6201bba9/Ensenanza-por-Investigacion-en-el-marco-de-la-Teoria-Antropologica-de-lo-Didactico-Una-propuesta-para-estudiar-las-funciones-a-trozos.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Ana-Corica/publication/311923286_Ensenanza_por_Investigacion_en_el_marco_de_la_Teoria_Antropologica_de_lo_Didactico_Una_propuesta_para_estudiar_las_funciones_a_trozos/links/5862aeaa08ae329d6201bba9/Ensenanza-por-Investigacion-en-el-marco-de-la-Teoria-Antropologica-de-lo-Didactico-Una-propuesta-para-estudiar-las-funciones-a-trozos.pdf) Acceso el 30 de enero de 2023

DISEÑO CURRICULAR PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA: MARCO GENERAL PARA EL CICLO SUPERIOR. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación y Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2010. Disponible en: [http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/marco\\_general\\_ciclo%20superior.pdf](http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/marco_general_ciclo%20superior.pdf) Acceso el 25 de enero de 2023

DISEÑO CURRICULAR PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA 5° AÑO: MATEMÁTICA-CICLO SUPERIOR. Coordinado por Claudia Bracchi y Marina Paulozzo - 1ra ed.- La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2011. Disponible en: <https://bibliografiaeducacion.files.wordpress.com/2012/11/matematica-51.pdf> Acceso el 25 de enero de 2023

DONVITO, Á., OTERO, M. R., y Sureda, P. Actitudes de la pedagogía de la investigación en el marco de la TAD: un análisis en tres escuelas secundarias. **Ikastorratza, e-Revista de didáctica**, v. 12, n. 7, p. 1-27, 2014. <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/9602>

FERRAGINA, R. y LUPINACCI, L. La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico. **CIAEM**, v. 14, p. 302-312. 2015.

FURNER, J. M. **Tackling Math Anxiety through Photography while using GeoGebra.** *Transformations*, v. 5, n. 1, p. 59-75, 2019.

FURNER, J. M. y MARINAS, C. A. Addressing Math anxiety in teaching Mathematics using photography and GeoGebra. **26th International Conference on Technology in Collegiate**

**Mathematics**, San Antonio, USA, v. 12, n. 1, p. 134–143, 2014. Disponible en: <http://www.math.odu.edu/~bogacki/epictcm/i/26/S125.html> Acceso el 25 de enero de 2023

FURNER, J. M., & YAHYA, N. Using GeoGebra, Photography, and Vocabulary to Teach Mathematics while Aiding our ESOL Populations. **Transformations**, v. 6, n. 1, art. 3, p. 18-41, 2020.

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, p. 99-123, 2014.

GASCÓN PÉREZ, J., & NICOLÁS, P. Paradigmas didácticos y reforma curricular: el caso de la teoría antropológica de lo didáctico. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 4. 2020.

HANFLING, M. **Estudio didáctico de la noción de función**. En: Chemello, G. (Ed.). Estrategias de enseñanza de la matemática. 1.ed. Quilmes: Universidad Virtual de Quilmes, 2000.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C; BAPTISTA, M. **Metodología de la investigación**. México D. F.: Mc Graw Hill, 2014.

HOHENWARTER, M. Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. **Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 10, n. 39, p. 11-18, 2014.

LEBART, L., MORINEAU A. y FENELON, J. P. **Tratamiento Estadístico de Datos**. Barcelona: Marcombo, 1985.

LUDWIG, M., JABLONSKI, S., CALDEIRA, A. y MOURA, A. **Research on OutdoorSTEM Education in the digital Age**. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020, 2020. Disponible en : [https://www.researchgate.net/publication/342106298\\_Research\\_on\\_Outdoor\\_STEM\\_Education\\_in\\_the\\_digital\\_Age\\_Proceedings\\_of\\_the\\_ROSETA\\_Online\\_Conference\\_in\\_June\\_2020](https://www.researchgate.net/publication/342106298_Research_on_Outdoor_STEM_Education_in_the_digital_Age_Proceedings_of_the_ROSETA_Online_Conference_in_June_2020) Acceso el: 25 de enero de 2023

MARRADI, A., ARCHENTI, N. y PIOVANI, J. **Metodología de las ciencias sociales**. Buenos Aires: Emecé Editores, 2007.

MEIER, A., HANNULA, M. y TOIVANEN, M. Mathematics and outdoor photography experience– exploration of an approach to mathematical education, based on the theory of Dewey’s aesthetics, LUMAT. **International Journal on Math, Science and Technology Education**, v. 8, n. 2, p. 146-166, 2018.

MEJÍA, J. Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. **Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social**, v. 1, n. 1, p. 47- 60, 2011.

MOREIRA, M. **Subsidios Metodológicos para el Profesor Investigador en Enseñanza de las Ciencias**. **Investigación en Enseñanza**: Aspectos Metodológicos, 2009. Disponible en: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios2.pdf>. Acceso el: 20 de enero de 2023.

MUNAKATA, M. y VAIDYA, A. Encouraging creativity in mathematics and science

through photography. **Teaching Mathematics and its Applications**, v. 31, n. 3, p.121-132, 2012. Disponible en: <https://doi.org/10.1093/teamat/hrr022> Acceso el: 20 de enero de 2023.

MUÑOZ CASADO, J. L. **Creogeбра**. A vista de GeoGebra. *Suma*, n. 88, p. 73–80, 2018.

OTERO, M. R., FANARO, M. A., CÓRICA, A. R., LLANOS, V. C., SUREDA, P. y PARRA, V. **La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática**. Buenos Aires: Editorial Dunken, 2013.

OTERO, M. R., FANARO, M. A. y LLANOS, V. C. La Pedagogía de la Investigación y del cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. **Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias**. v. 8 , n. 1, p. 77-89, 2013. Disponible en: <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/1114> Acceso el: 20 de enero de 2023.

PARRA, V., y OTERO, M. R. Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 13, n. 2, p. 7- 18, 2018.

PARRA, V., y OTERO, M. R. Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas”. **Educación matemática**, v. 29, n. 3, p. 9-49, 2017.

RIZZO, K. **Concurso Matemática, Fotografía y GeoGebra**. En F. J. Córdoba Gómez, L. A. Ciro López, y J. C. Molina García (Eds.), Congreso Latinoamericano de GeoGebra “*Las TIC al servicio de la innovación educativa*”. p. 161–164, 2016. Medellín, Colombia. Disponible en: [https://www.ugc.edu.co/sede/bogota/documentos/investigaciones/panel/geogebra\\_2016.pdf](https://www.ugc.edu.co/sede/bogota/documentos/investigaciones/panel/geogebra_2016.pdf) Acceso el: 21 de enero de 2023.

RIZZO, K, DEL RÍO L. y MANCENIDO, M. **Mirar las matemáticas a través del lente de una cámara**. Bridges 2019. Universidad Johannes Kepler. Linz, Austria, 2019. <http://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-559.html>

RIZZO, K, DEL RÍO, L, MANCENIDO, M LAVICZA, Z HOUGHTON, A. Vincular la fotografía y las matemáticas con el uso de la tecnología. **Revista Open Education Studies**, v. 1, n. 1, p. 262–266, 2019.

RODRIGUEZ FERNANDEZ, J. L., GODINO, J. y RUIZ HIGUERAS, L. La noción de función como objeto a enseñar y como objeto enseñado: Análisis de un proceso de transposición didáctica. **Cuadrante**, v. 4, n. 2, p. 91-116, 1995.

SERRANO MARTÍNEZ, L. **La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica**. Doctoral dissertation, Universitat Ramon Llull, 2013.

SHARP, B., GAROFALO, J., & THOMPSON, A. Digital Images in the Mathematics Classroom. In the Curriculum-Mathematics. **Learning & Leading with Technology**, v. 31, n. 8, p. 30-32, 2004.

## ANEXO 1 - INFORMACIÓN SOBRE EL MANUSCRITO

### AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes de 5º año del Instituto Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, que contribuyeron al desarrollo de la investigación.

### FINANCIACIÓN

No hubo financiamiento.

### CONTRIBUCIONES DE AUTORIA

Resumen / Resumen / Resumen: Karina Rizzo, Viviana Costa.

Introducción: Karina Rizzo, Viviana Costa.

Referencial teórico: Karina Rizzo, Viviana Costa.

Análisis de datos: Karina Rizzo, Viviana Costa.

Discusión de resultados: Karina Rizzo, Viviana Costa.

Conclusión y comentarios finales: Karina Rizzo, Viviana Costa.

Referencias: Karina Rizzo, Viviana Costa.

Revisión del manuscrito: Karina Rizzo, Viviana Costa.

Aprobación de la versión final publicada: Karina Rizzo, Viviana Costa.

### CONFLICTOS DE INTERÉS

Los autores han declarado que no existe ningún conflicto de intereses de carácter personal, comercial, académico, político y económico con respecto a este manuscrito.

### DISPONIBILIDAD DE DATOS DE BÚSQUEDA

Las autoras declaramos que pondremos a disposición los datos de la investigación en caso de que otras personas e instituciones involucradas así lo soliciten.

### PREIMPRESIÓN

No publicado.

### CONSENTIMIENTO PARA USAR IMAGEN

No aplica.

### APROBACIÓN DEL COMITÉ DE ÉTICA DE INVESTIGACIÓN

No aplica en este caso.

### CÓMO CITAR - ABNT

RIZZO, Karina; COSTA, Vivian. Diseño de Recorrido de Estudio e Investigación que combina fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 11, n. 1, e23115, enero/diciembre de 2023. <https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16864>

### CÓMO CITAR - APA

Rizzo, K.; Costa, V. (2023). Diseño de Recorrido de Estudio e Investigación que combina fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas. *REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, 11(1), e23115. <https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16864>

### LICENCIA DE USO

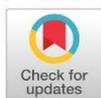
Con licencia de Creative Commons [Attribution-NonCommercial 4.0 International License \(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Esta licencia permite compartir, copiar, redistribuir el manuscrito en cualquier medio o formato. Además, permite adaptar, remezclar, transformar y construir sobre el material, siempre que se atribuya el debido crédito de autoría y publicación inicial en esta revista.



## **DERECHOS DE AUTOR**

Los derechos de autor son mantenidos por los autores, quienes otorgan a la Revista REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática - los derechos exclusivos de primera publicación. Los autores no serán remunerados por publicar trabajos en esta revista. Los autores están autorizados a asumir contratos adicionales por separado, para la distribución no exclusiva de la versión del trabajo publicado en esta revista (por ejemplo, publicación en un repositorio institucional, en un sitio web personal, publicación de una traducción o como capítulo de un libro), con reconocimiento de autoría y publicación inicial en esta revista. Los editores de la Revista tienen el derecho de hacer ajustes textuales y adaptarlos a las normas de la publicación.

## **POLÍTICA DE RETIRO - CROSSMARK/CROSSREF**



Los autores y editores asumen la responsabilidad y el compromiso con los términos de la Política de Descargo de Responsabilidad de la Revista REAMEC. Esta política está registrada en Crossref con el DOI: <https://doi.org/10.26571/reamec.retratacao>

## **PUBLISHER**

Universidade Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicación en el [Portal de Periódicos de la UFMT](#). Las ideas expresadas en este artículo son responsabilidad de sus autores, no representando necesariamente la opinión de los editores o de la referida universidad.

## **EDITORES**

Dailson Evangelista Costa  

Luis Andrés Castillo  

## **EDITORIA CONVIDADA**

Daysi Julissa García-Cuéllar  

## **ARBITROS**

Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres.

## **HISTÓRICO**

Submetido: 19 de septiembre de 2023.

Aprovado: 23 de noviembre de 2023

Publicado: 18 de Dezembro de 2023