REAMEC
REVISTA DA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ESTUDIO DE CUADRILÁTEROS BASADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y USO DE GEOGEBRA

STUDY OF QUADRILATERALS BASED ON PROBLEM SOLVING AND THE USE OF GEOGEBRA

ESTUDO DE QUADRILÁTEROS BASEADO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E NO USO DO GEOGEBRA

William Enrique Poveda Fernández*

RESUMEN

En este artículo se presenta y analiza el trabajo seguido por un grupo de estudiantes de educación matemática en un ambiente de resolución de problemas y uso de GeoGebra. Para ello, se trabajó en un curso de Geometría Euclidiana durante 16 semanas, del segundo año del plan de estudios de la carrera universitaria. En este documento se analiza un problema relacionado con cuadriláteros. Los resultados muestran que los futuros educadores matemáticos representaron el problema en GeoGebra utilizando sus conocimientos matemáticos previos, examinaron las propiedades y los atributos de los objetos involucrados, realizaron conjeturas y las comprobaron basados en argumentos visuales y empíricos. Como parte de una demostración final, se apoyaron en GeoGebra para generar ideas y así, armar un argumento deductivo para asegurar la veracidad de estas.

Palabras clave: Resolución de problemas. GeoGebra. Cuadriláteros.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present and analyse the work followed by a group of mathematics education students in an environment of problem solving and use of GeoGebra. To do this, we worked on a Euclidean Geometry course for 16 weeks, from the second year of the university degree curriculum. This document discusses a problem related to quadrilaterals. The results show that the future mathematics educators represented the problem in GeoGebra using their previous mathematical knowledge, examined the properties and attributes of the objects involved, made conjectures, and verified them based on visual and empirical arguments. As part of a final demonstration, they relied on GeoGebra to generate ideas and thus build a deductive argument to ensure their veracity.

Keywords: Problem solving. GeoGebra. Quadrilaterals.

RESUMO

Este artigo apresenta e analisa o trabalho acompanhado por um grupo de estudantes de educação matemática em um ambiente de resolução de problemas e utilização do GeoGebra. Para isso, trabalhamos em um curso de Geometria Euclidiana durante 16 semanas, a partir do segundo ano do

* Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México (CINVESTAV-IPN). Profesor e investigador en la Universidad de Costa Rica (UCR), San José, San Pedro, Costa Rica. Dirección de correspondencia: San José, San Pedro de Montes de Oca, Costa Rica CEP: 11501-2060. Correo electrónico: william.poveda@ucr.ac.cr.

currículo do curso universitário. Este documento discute um problema relacionado a quadriláteros. Os resultados mostram que os futuros educadores matemáticos representaram o problema no GeoGebra utilizando seus conhecimentos matemáticos prévios, examinaram as propriedades e atributos dos objetos envolvidos, fizeram conjecturas e as verificaram com base em argumentos visuais e empíricos. Como parte de uma demonstração final, contaram com o GeoGebra para gerar ideias e assim construir um argumento dedutivo para garantir a sua veracidade.

Palavras-chave: Resolução de problemas. GeoGebra. Quadriláteros.

1 INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas matemáticos es una herramienta importante en el desarrollo de la ciencia y, en particular, del aprendizaje de la matemática. En América Latina, la educación de niños y adolescentes ha carecido de procesos sistematizados de resolución de problemas matemáticos, sin embargo, esto ha ido cambiando con el tiempo dado que los recientes cambios en planes de estudio en diversos países fortalecen esta área (THEZOLIN y PIRES, 2023).

En particular y pese a décadas de investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, los estudiantes de primaria y secundaria tienen problemas para interactuar con objetos y conceptos geométricos teóricos y los del mundo real (ITZCOVICH, 2005) por lo que su razonamiento y modelado geométrico se ve limitado. Razón por la cual, los docentes en matemática deben fomentar los procesos de resolución de problemas geométricos buscando o creando estrategias que favorezcan el desarrollo del aprendizaje y competencias de sus estudiantes, es decir, aplicar los conocimientos y estrategias metodológicas adquiridas durante su formación y desde su experiencia laboral (GONCALVES, 2006).

Según Common Core State Standards (NATIONAL GOVERNORS ASSOCIATION, 2020), una de las habilidades que los docentes deben fomentar en sus estudiantes es la resolución de problemas, ya que les permite enfrentar situaciones complejas, aplicar conceptos y relaciones matemáticas en lo cotidiano y desarrollar la capacidad de análisis. Cuando un estudiante se enfrenta a un problema se ponen en juego: el razonamiento, la comunicación, la representación y las conexiones entre conceptos y propiedades matemáticas.

Así, National Governors Association (2020) define a un estudiante competente en matemática como una persona que analiza el enunciado de un problema, elabora una ruta para iniciar el proceso de resolución, analiza los datos del problema, establece posibles restricciones en el dominio del problema, formula conjeturas y las valida o refuta.

Al enfrentar un problema matemático, los estudiantes pueden trabajar en colaboración con otros y discutir diferentes propuestas de solución, lo que les permite comunicar sus ideas conectar diversos conceptos y áreas de la matemática (SCHOENFELD, 2022). Cuando un estudiante analiza el enunciado de un problema, lo ideal es que cree una representación de este (POLYA, 1957) y es aquí en donde entra en juego el entendimiento del problema y la búsqueda de relaciones entre los datos o elementos que lo conforman que, posteriormente, permiten establecer una estrategia de solución. Desde el inicio de esta ruta, el uso de tecnologías digitales especializadas en matemática puede ser de gran ayuda (XAVIER, ANDRADE, LEANDRO y CHAGAS, 2023)

Diversos estudios e investigaciones han analizado el papel de las tecnologías digitales en los últimos años en la educación matemática, en donde se destaca la importancia de las matemáticas en la sociedad y el papel de diversas herramientas digitales como un medio para potenciar la enseñanza y aprendizaje de la matemática (ENGELBRECHT, BORBA, KALSER, 2023; PINHO y MORETTI, 2018).

El papel de la tecnología digital debe ayudar al docente en la creación de ambientes de aprendizaje en donde se fomente la colaboración y la comunicación entre estudiantes y educadores en aras de mejorar la adquisición de conocimientos y habilidades de los alumnos (ROSSI y JADER, 2023). En este sentido, en el trabajo de García y Poveda (2022) se argumenta que las tecnologías digitales pueden proporcionar experiencias de aprendizaje matemático a los estudiantes que los ayuden a desarrollar competencias matemáticas en la resolución de problemas.

El uso de un ambiente de geometría dinámica, por ejemplo, GeoGebra, implica un cambio en la estructura y en la metodología de las actividades de una clase de matemática y una concepción por parte de los docentes de la importancia de su uso LESH, ZAWOJEWSKI, 2007; LEUNG, BACCAGLINI-FRANK, 2017). En particular, el aprendizaje de la geometría se ve beneficiado con esto, ya que, como argumenta Itzcovich (2005), existe una dificultad en la comprensión de conceptos geométricos arraigada a las representaciones de objetos, que son abstractos e intangibles en un espacio teórico conceptualizado, por ejemplo, la noción y representación de recta o plano (FRANCHI, RINCÓN, 2004).

Es en esta línea en la que se inscribe la investigación que aquí se reporta y para la que se diseñó una situación didáctica para el tema de cuadriláteros para un grupo de estudiantes de educación matemática perteneciente al primero de tres cursos de geometría, basado en la resolución de problemas matemáticos y el uso de GeoGebra. La pregunta que guio la investigación fue: ¿De qué manera un ambiente de aprendizaje apoyado por Geometría Dinámica contribuye al desarrollo de la resolución de problemas geométricos?

2 MARCO TEÓRICO

El razonamiento, definido como cualquier procedimiento que permita a un estudiante generar nueva información a partir de la aportada por una situación a la que se enfrente o a la derivada de conocimiento anterior (TORREGROSA y QUESADA, 2007), es fundamental para resolver problemas nuevos (MASON; JOHNSTON-WILDER, 2006), en consecuencia, y dado el objetivo de esta investigación, es importante considerar cómo los profesores pueden ofrecer a los estudiantes una mayor variedad de experiencias de aprendizaje a través de la resolución de problemas geométricos. La resolución de problemas es un área de investigación en el campo de la educación matemática y su objetivo, según Santos-Trigo (2020) es promover el desarrollo del conocimiento matemático.

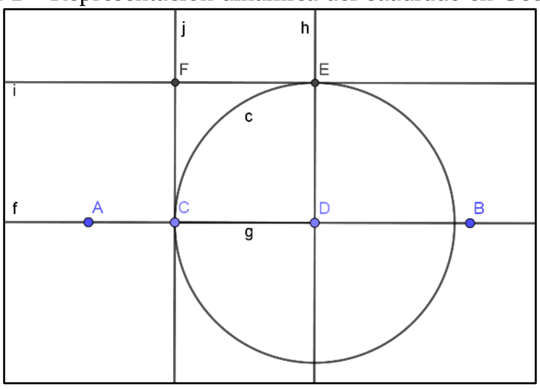
El aprendizaje centrado en la resolución de problemas fomenta el desarrollo del razonamiento y la toma de decisiones (SCHOENFELD, 2022), esto es, que los estudiantes aprendan a identificar patrones, realizar estimaciones precisas y tomar decisiones basadas en datos empíricos. Se debe concebir hacer y aprender matemática lejos de seguir una secuencia de las reglas o algoritmos proporcionados por el profesor y que la respuesta correcta es aquella que es confirmada por el maestro (SCHOENFELD, 1985). Así, durante el proceso de aprender matemática, la experimentación y la comunicación debe ser la base en donde los estudiantes, apoyados con sus profesores, adquieran nuevos conocimientos y estrategias que les permitan enfrentarse a nuevos problemas (Schoenfeld, 2007). El razonamiento y el desarrollo de ideas matemáticas transitan en un proceso de reflexión donde el estudiante refina o transforma sus ideas como resultado de participar colaborativamente en un ambiente de aprendizaje (SANTOS-TRIGO, 2020).

En estos procesos de experimentación, comunicación de ideas y de reflexión, un Sistema de Geometría Dinámica, GeoGebra para efectos de este estudio, proporciona una serie de herramientas a través de las representaciones dinámicas, es decir, una configuración en donde hay movimiento de los elementos que conforman la figura, medición de la longitud de segmentos, la amplitud de ángulos, entre otros, y rotación de las figuras geométricas. Esto, posibilita la creación de una representación del problema, en palabras de Duval (1998), beneficia diferentes tipos de visualización y no solo aquellas canónicas o prototípicas que generalmente construye un estudiante, por ejemplo, un cuadrado puede rotarse o verse la trazar cuatro rectas que se cruzan ortogonalmente a la misma distancia.

GeoGebra ofrece la posibilidad de conectar conceptos en la creación de una figura, por ejemplo, cuando un estudiante se enfrenta a crear una representación dinámica de un cuadrado, entran en juego las propiedades del mismo y otros conceptos: rectas paralelas, rectas perpendiculares, ángulos rectos, congruencia de lados, congruencia de diagonales, entre otros.

En la figura 1 se representa un cuadrado en GeoGebra, se siguen los pasos: trazar una recta *AB*, colocar un punto *C* sobre tal recta, en un punto *D* sobre la recta *AB* se traza una recta perpendicular a *AB* y que pasa por el punto *D*, se traza la circunferencia centrada en *D* y con radio la longitud del segmento *CD*, se determina la intersección *E* de la circunferencia y la recta perpendicular a *AB* (esto para determinar el punto exacto en donde la longitud del segmento *CD* es igual a *DE*), se traza la recta perpendicular a la recta *DE* que pasa por el punto *E*, se traza la recta perpendicular a *CD* que pasa por el punto *C* y, finalmente, se determina la intersección *F* de esta recta y la recta *CD*. La anterior es solo una posibilidad de construir un cuadrado *CDEF*. Resultan importantes dos cosas cuando se usa GeoGebra: se deben hacer explícitos los conocimientos acerca de las propiedades de las figuras para representarlas y al mover elementos la figura debe conservar sus propiedades.

Figura 1 – Representación dinámica del cuadrado en GeoGebra.



Fuente: Elaboración propia

Explorar un problema significa visualizar los objetos y sus atributos de una figura en la representación dinámica, implica que el estudiante debe observar posibles relaciones, basados en el movimiento, medición o rotación de figuras, que den lugar a conjeturas. De igual manera, pueden comprobar o rechazar las ideas iniciales mediante elementos empíricos, por ejemplo, se rechaza una conjetura al mover un elemento y observar que la longitud de este o de otro no cumple con la relación planteada originalmente (POVEDA, 2022).

El uso de GeoGebra puede llegar a potencial el razonamiento matemático de los estudiantes en la resolución de problemas, en esta área de investigación se han desarrollado marcos conceptuales, desde Polya (1945), Schoenfeld (1985), Jacinto y Carreira (2017), Santos-Trigo (2020), entre otros, para caracterizar el progreso de los estudiantes en las actividades durante la resolución de problemas.

El pionero en resolución de problemas Polya (1945) y el trabajo de Schoenfeld (1985) ha sido la base y punto de partida para el desarrollo de nuevas investigaciones agregando el componente del uso tecnologías digitales. Para efectos de este estudio se consideró el marco teórico propuesto por Santos-Trigo y Camacho Machín (2013), en el cual se caracteriza el razonamiento producto del uso de herramientas digitales al resolver un problema matemático.

El marco comprende cuatro episodios de la resolución de problemas con el apoyo de herramientas digitales. Para efectos de esta investigación solo se consideran los tres iniciales. El primero es el de *comprensión* que se refiere al proceso de cómo se enfrenta una persona al problema y que comprende la comprensión y análisis del enunciado. El episodio considera que los estudiantes hacen uso de un sistema de geometría dinámica para representar el problema y establecer las conexiones entre diversos conceptos y teoremas matemáticos, ya que el uso de un sistema de geometría dinámica exige que el estudiante, al leer el enunciado, piense en los conceptos y propiedades matemáticas y en las herramientas de GeoGebra para representar el problema (SANTOS-TRIGO, CAMACHO MACHÍN, 2013).

El segundo episodio es el de exploración del problema, una vez que el estudiante construyó una representación dinámica del problema, evidenciando la comprensión de su enunciado, está en condiciones de iniciar su exploración con la ayuda de las herramientas de movimiento y medición. Durante este proceso, el estudiante puede ampliar las perspectivas desde las cuales se puede abordar y analizar el problema y formular conjeturas relacionadas con las soluciones, donde las mismas herramientas del sistema de geometría dinámica son un ingrediente esencial para confirmarlas o refutarlas.

El tercero de los episodios es la búsqueda de enfoques múltiples y es un complemento del episodio anterior. El estudiante aborda el problema desde diferentes perspectivas, por ejemplo, mediante el uso de conceptos analíticos, algebraicos o geométricos. Es acá en donde se establecen conexiones entre diversas áreas de la matemática. Es en este episodio donde el estudiante demuestra sus conjeturas iniciales sobre el problema.

3 METODOLOGÍA

En esta sección se describe el curso universitario donde se implementó el uso sistemático de GeoGebra durante el proceso de resolución de problemas y se detallan las características de sus estudiantes y la manera cómo se organizaron y analizaron los datos. El curso se llama Geometría Euclidiana I y está en el segundo año del plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica.

El curso tiene como objetivo estudiar los conceptos geométricos abordados durante la educación primaria y secundaria desde una perspectiva axiomática, formal y rigurosa. Se fomenta el desarrollo del razonamiento matemático. Así, el docente del curso desarrolla los contenidos geométricos desde un razonamiento deductivo y de observación. También, se espera que los estudiantes utilicen diversas tecnologías digitales como parte de su formación, se privilegia el uso de GeoGebra para representar un problema; establecer relaciones y conexiones entre los objetos involucrados; y, establecer conjeturas que deben ser justificarlas mediante el uso de argumentos visuales o empíricos, es decir, mediante las herramientas que proporciona GeoGebra, finalmente, toda conjetura debe ser demostrada mediante el uso de conceptos y teoremas geométricos.

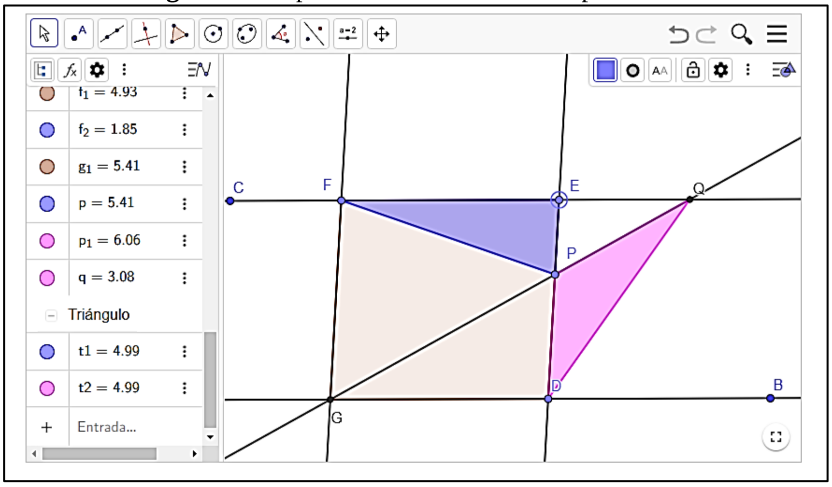
El curso comprendió 16 semanas, en cada una de estas se desarrolló una sesión presencial de tres horas en un laboratorio de computadoras y otra de dos horas por semana de manera virtual asincrónica, debido a la pandemia y a la transición hacia lo 100% presencial. En esta investigación se reporta el trabajo realizado en la sesión presencial de la sesión 10 de un equipo de tres estudiantes. Estos participantes se involucraron en el proceso de resolución de un problema relacionado con cuadriláteros y en específico con paralelogramos, compartiendo y discutiendo sus ideas con sus pares, posteriormente, debían exponer sus soluciones ante el profesor.

Las edades de los estudiantes participantes oscilaban entre 19 y 22 años, tenían conocimientos básicos de GeoGebra, de geometría euclidiana (lo estudiado previamente el curso) y de álgebra.

La función del profesor a cargo del curso fue introducir los temas geométricos, diseñar problemas matemáticos para los estudiantes y retroalimentarlos en sus procesos de solución. Los datos se recolectaron a través de las soluciones presentadas por los alumnos en la plataforma Moodle en formato PDF, Word o GGB (formato de los archivos de GeoGebra), además, el docente llevó una bitácora del trabajo realizado. En los archivos GGB, los estudiantes debían detallar y mostrar al profesor sus exploraciones y soluciones del problema, incluyendo un texto de cada paso seguido.

El problema que el profesor suministró a los estudiantes luego de estudiar triángulos, cuadriláteros y paralelogramos fue: Considere el paralelogramo $GDEF$, P es un punto cualquiera sobre el segmento ED, Q es el punto de intersección de las rectas FE y GP ¿Qué relación tienen los ΔFEP y ΔPQD? (Figura 2).

Figura 2 – Representación dinámica del problema.



Fuente: Elaboración propia

La investigación utiliza la teoría interpretativa, en se analizan las expresiones verbales y escritas de las personas mientras resuelven problemas y comunican sus resultados (BAUTISTA, 2011). El método utilizado es el análisis conversacional en el cual las interacciones verbales y escritas revelan parte de la forma de interactuar con un problema y revelan su razonamiento matemático a través de una conversación Villalta (2009).

4 ANÁLISIS Y RESULTADOS

En esta sección se describe el trabajo realizado por un equipo tres personas en la sesión de trabajo 10 y se analiza de acuerdo con los episodios de resolución de problemas de Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013). Los extractos de las ideas matemáticas y soluciones se presentan según los episodios en los cuales transitaron los estudiantes.

4.1 Episodio 1. Representación dinámica el problema

Antes de presentar el problema a los estudiantes, en las semanas previas se estudiaron conceptos y relaciones que permitieran comprender y abordar el problema. En particular, el equipo de trabajo de alumnos utilizó los siguientes conceptos matemáticos para representar el problema en GeoGebra:

1. Definición de recta y rectas paralelas.

https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16863 ISSN 2318-6674

2. Definición de intersección entre dos rectas.
3. Recta transversal
4. Definición de triángulo.
5. Definición de cuadrilátero paralelogramo.

El proceso seguido fue:

1. Trazar la recta *AB*.
2. Colocar un punto *C* en el plano.
3. Trazar una recta paralela a la recta *AB* que pasa por el punto *C*.
4. Ubicar un punto *D* en la recta *AB* y un punto *E* en la recta paralela a *AB*.
5. Ubicar un punto *F* en la recta paralela a *AB*.
6. Trazar la recta paralela a la recta *DE* que pasa por el punto *F*.
7. Definir *G* como la intersección de la recta anterior y la recta *AB*.
8. Utilizar la herramienta Polígono para definir el paralelogramo *GDEF*.
9. Colocar un punto *P* sobre el segmento *ED*.
10. Trazar la recta *GP*.
11. Utilizar la herramienta Polígono para definir el triángulo *PEF*.
12. Definir la intersección de las rectas *GP* y *CE* como el punto *Q*.
13. Utilizar la herramienta Polígono para definir el triángulo *PQD*.

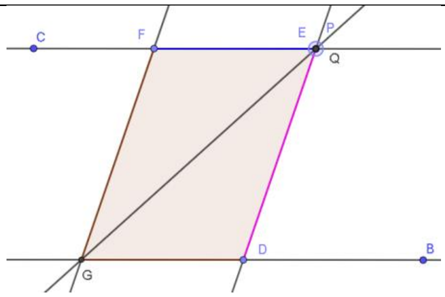
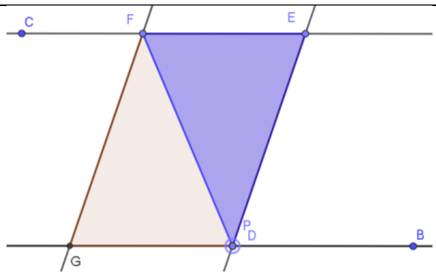
El lector puede usar como referencia la representación dinámica del problema que realizaron en https://www.geogebra.org/m/dxhj8djr. En este proceso, los estudiantes tuvieron que poner en juego sus conocimientos matemáticos previos, a diferencia del uso de papel y lápiz que podrían resultar invisibles, así, al utilizar GeoGebra. El equipo de trabajo visibilizó y utilizó información matemática explícita en el enunciado, reorganizó esta información y estableció las relaciones necesarias para construir una representación del problema, tal que, al arrastrar un elemento se siguiera conservando las condiciones del problema.

Los estudiantes argumentaron que primero debió definir la recta *AB* y luego una paralela a esta para construir el paralelogramo, sin utilizar los puntos *A*, *B* o *C* como vértices. Esta estrategia resulta importante cuando se utiliza GeoGebra ya que, permite arrastrar puntos y modificar las dimensiones de los lados de paralelogramo.

4.2 Episodio 2. Los estudiantes exploran el problema

En el proceso de exploración de la representación dinámica, los estudiantes declararon que centraron la atención en los triángulos formados, en un principio solo arrastraron el punto P y observaron que $P \neq E$ y $P \neq D$. Agregaron que el enunciado del problema debía mejorarse al escribir: P es un punto cualquiera sobre el segmento ED diferente de E y de D. Las restricciones ellos determinaron se resumen en el Cuadro 1.

Cuadro 1 – Transcripción de las restricciones detectadas por los estudiantes.

Condición	Figura	Transcripción de los estudiantes
$P \neq E$		Si P=E entonces no de definen triángulos
$P \neq D$		Si P=D entonces G, D=P *y* Q son colineales, por lo que no se cumple la condición del problema de que Q es la intersección de las rectas GP y CF.

Fuente: Evidencias presentadas por los estudiantes.

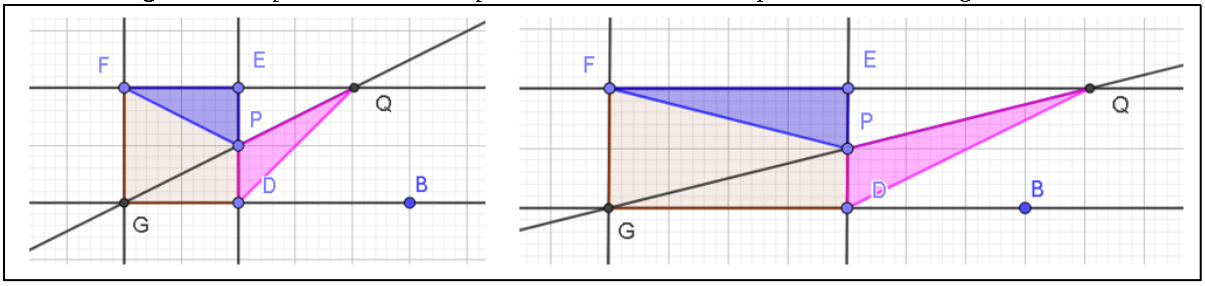
En este proceso, se observa la importancia del arrastre de puntos como una estrategia importante para observar y determinar casos especiales o restricciones en los cuales el problema no tiene sentido.

En la ruta hacia determinar la relación que existe entre ambos triángulos, el equipo de trabajo de estudiantes siguió la estrategia de casos particulares, es decir, en la representación dinámica hicieron que el paralelogramo fuera un cuadrado y, luego, un rectángulo, además, colocaron P en el punto medio del segmento ED, para ello, se apoyaron en la cuadrícula de GeoGebra, véase la Figura 3.

Mediante esa exploración, concluyeron, que, dadas esas condiciones, los triángulos tienen iguales bases y alturas, por lo tanto, igual área. Se debe resaltar que no recurrieron a la medición de longitudes ni áreas, sino que su trabajo estuvo enmarcado en visualizar y aplicar conocimiento matemático para llegar a la conclusión. Sin embargo, aún tenían pendiente demostrar que los segmentos EF y EQ son congruentes.

https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16863 2318-6674

Figura 3 – Exploración de casos particulares donde *P* es el punto medio del segmento *ED*.

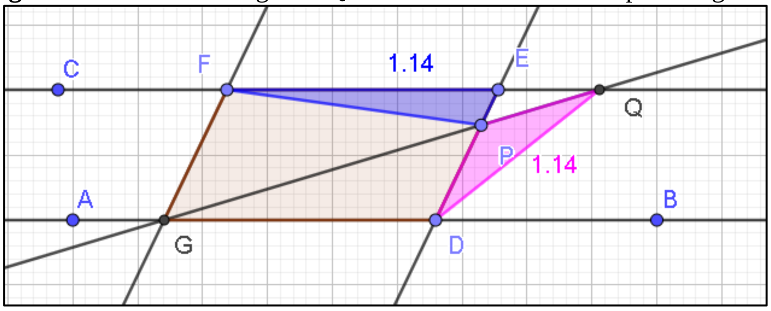


Fuente: Evidencias presentadas por los estudiantes.

Siguiendo este razonamiento, llegaron a la conjetura: bajo las condiciones del problema, en un paralelogramo *GDEF*, si *P* es el punto medio de *ED* entonces las áreas de los triángulos *EFP* y *DQP* son iguales.

A partir de esta exploración y de compartir el trabajo con sus pares, ellos generalizaron la conjetura formulada en donde *P* fuese diferente al punto medio del lado *ED*. Para ello, utilizaron la herramienta medición de áreas de GeoGebra para medir y colocar en pantalla las áreas de los dos triángulos (Figura 4). Con base en la medición y el arrastre el punto *P* sobre el segmento *ED*, validaron su conjetura.

Figura 4 – Área del triángulo *GQD* es la mitad del área del paralelogramo.



Fuente: Evidencias presentadas por los estudiantes

Si se analiza el proceso de resolución de los estudiantes, a través del lente del segundo episodio de Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013), es posible identificar una serie de estrategias de exploración que entran en juego en el proceso de formulación de conjeturas. Por ejemplo, es evidente que utilizaron las herramientas de GeoGebra y su conocimiento matemático cuando utilizan la herramienta de arrastre para visualizar casos específicos como lo es el cuadrado y rectángulo, además, de colocar el punto *P* en la mitad del segmento *ED*. Con esto obtuvo información sobre la posible relación entre dos triángulos. Esto le permitió pensar en la conjetura a nivel general. De igual manera, se podría argumentar que el equipo de estudiantes activa el manejo y exploración de la representación dinámica cuando mide las áreas

https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16863 2318-6674

de los triángulos para concluir, de manera empírica, la relación entre los triángulos; y, valida la conjetura al mover el punto P y los vértices del paralelogramo.

4.3 Episodio 3. Los estudiantes demuestran la conjetura

La discusión de los estudiantes giró en torno a cómo demostrar la conjetura y qué conceptos y teoremas utilizar. El grupo de trabajo presentó una demostración que se trascribe en el Cuadro 2.

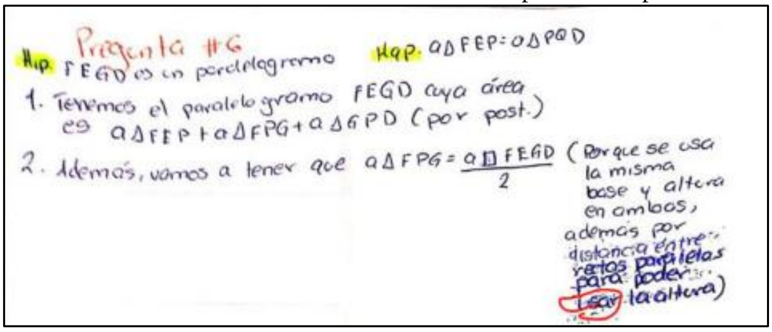
Cuadro 2 – Pasos seguidos por los estudiantes en la demostración de la conjetura.

1. $aFEDG = a\Delta FEP + a\Delta FPG + a\Delta GPG$	Postulado de la suma de áreas
2. $a\Delta FPG = aFEDG/2$	Poseen misma base y altura
3. Trazar la diagonal FD	Construcción
4. $a\Delta FPD + a\Delta FEP = aFEDG/2$	Propiedad de la diagonal
5. $a\Delta FEP + a\Delta GPD = aFEDG/2$	Usando $a\Delta FPG = aFEDG/2$
6. $a\Delta GDQ = a\Delta GPD + a\Delta PQD$	Postulado de suma de áreas
7. $a\Delta GDP = aFEDG/2$	Usando la propiedad anterior
8. $a\Delta FPD + a\Delta FEP = a\Delta FEP + a\Delta GPD$	Por (4) y (5)
9. $a\Delta FPD = a\Delta GPD$	Implicación de (8)
10. $a\Delta GDQ$ es la mitad del área del paralelogramo, en particular $a\Delta GDQ = a\Delta FPG$	Propiedades del paralelogramo
11. $a\Delta GPD + a\Delta PQD = a\Delta FEP + a\Delta GPD$	Implicación e (8) y (10)
12. $a\Delta PQD = a\Delta FEP$	Implicación de (11)

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5 se muestra un extracto del trabajo realizado por los tres estudiantes:

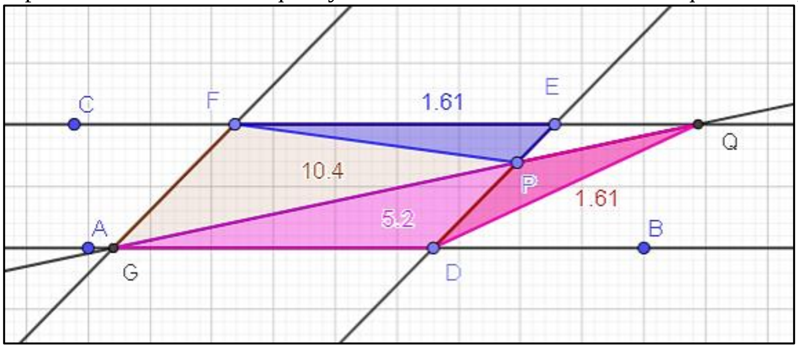
Figura 5 – Extracto de la evidencia de la demostración presentada por los estudiantes.



Fuente: Evidencias presentadas por los estudiantes.

En la revisión de la demostración, el profesor cuestionó a los estudiantes sobre cómo concluyeron el paso 10, es decir, ¿por qué $a\Delta GDQ = a\Delta FPG$? Ellos respondieron que, mediante las herramientas geométricas y algebraicas, no les fue posible deducirlo, así que regresaron a explorar la representación dinámica en la búsqueda de posibles relaciones que permitiera continuar la demostración luego del paso 9. La demostración analítica los llevó centrar la atención en $a\Delta GDQ$, por lo que midieron su área y concluyeron que es la mitad del área del paralelogramo, en la Figura 6 se muestran los dos valores.

Figura 6 –Representación dinámica que ayudó a los estudiantes a concluir que $a\Delta GDQ = a\Delta FPG$.



Fuente: Evidencias presentadas por los estudiantes.

Luego, observaron que la altura asociada a la base del lado GD de $a\Delta GDQ$ mide igual que la altura del paralelogramo, razón por la cual, $a\Delta GDQ$ es la mitad del área de paralelogramo, en particular, $a\Delta GDQ = a\Delta FPG$.

En este tercer episodio, los estudiantes se enfrentaron a la necesidad de justificar, mediante argumentos geométricos la conjetura, según expresaron, la discusión, reflexión y retroalimentación fueron elementos claves para refinar ideas matemáticas en el proceso de elaborar y terminar la demostración. La representación dinámica les permitió visualizar el comportamiento de un objeto y se convirtió en un elemento importante para terminar la demostración.

5 CONSIDERACIONES

Las evidencias recabadas en esta investigación permiten identificar un ambiente de resolución de problemas apoyado con uso de tecnologías digitales como un entorno en donde los futuros educadores matemáticos tienen la oportunidad de realizar un trabajo colaborativo y a la vez autodirigido. El trabajo en equipo se convirtió en un espacio de interacción, discusión y reflexión de estrategias para la resolución de problemas, además, el grupo de estudiantes comunicó y conoció las ideas de sus compañeros, y, a partir de esto formularon una conjetura, la validaron mediante elementos empíricos y la demostraron utilizando sus conocimientos matemáticos y apoyados en diversas estrategias asociadas al uso de GeoGebra.

Un ambiente aprendizaje centrado en la resolución de problemas geométricos apoyado por GeoGebra en un grupo de futuros educadores matemáticos fomenta el desarrollo del razonamiento matemático y contribuye a establecer rutas de solución y la toma de decisiones. En otras palabras, cuando los futuros profesores aprenden a representar problemas, a identificar patrones, a formular conjeturas, a poner en juego sus conocimientos se podría pensar que lo podrían utilizar en su futura labor, contribuyendo con el razonamiento matemático de sus estudiantes y, así, ayudarlos en situaciones cotidianas de toma de decisiones basadas en datos empíricos.

A manera de reflexión, al utilizar la resolución de problemas matemáticos como parte de la formación de futuros educadores matemáticos, se fortalecen las habilidades asociadas al liderazgo y de colaboración. Es importante que los maestros lejos de ser islas en las instituciones educativas lideren y trabajen en continúa colaboración con pares en el diseño y planificación de actividades didácticas en aras de fortalecer la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS

BAUTISTA, P. **Proceso de la Investigación Cualitativa. Epistemología, Metodología y Aplicaciones**. Manual Moderno (1ª ed.), 2011

DUVAL, R. Geometry from a cognitive point of view. In Mammana; V. Villani (Org.) **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century**. Kluwer. 1998.

ENGELBRECHT, J., KWON, O.N., BORBA, M.C., YOON, H., BAE, Y., LEE, K. The impact of COVID-19 on the format and nature of academic conferences in mathematics education. ***ZDM Mathematics Education*** v. 55, 2023, p. 95–108. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01421-y

FRANCHI, L.; RINCÓN, A. Tipología de errores en el área de la Geometría plana. Parte II. **Educere**, v. 8(25) 2004, p. 196–204. Acceso em: 20 jan. 2023.

GARCÍA-RODRÍGUEZ, M; POVEDA, W. El MOOC, un entorno virtual para la resolución de problemas matemáticos. **Educación matemática**, v. 34, no 2, 2022, p. 153-181. Acceso em: 25 jan. 2023. DOI: https://doi.org/10.24844/EM3402.06.

GONCALVES, R. ¿Por qué los Estudiantes no logran un Nivel de Razonamiento en la Geometría? *Revista Ciencias de la Educación*, v. *1*(27), 2006, p. 83–98. Disponível em: http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volIn27/27-5.pdf. Acesso em: 30 jan. 2023.

ITZCOVICH, H. **Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones**. Libros del Zorzal, 2005.

JACINTO, H.; CARREIRA, S. Mathematical problem solving with technology: The techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. ***International Journal of Science and Mathematics Education***, v.15(6), 2017, p- 1115–1136. Acceso em: 25 jan. 2023. http://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8.

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. St. Albans: Tarquin Publications, 2006.

National Governors Association**. Standards for Mathematical Practice. Make sense of problems and persevere in solving them**. Common Core State Standards Initiative, 2020.

LESH, R.; ZAWOJEWSKI, J. S. Problem solving and modelling. In: LESTER, F. (Orgs), **The second handbook of research on mathematics teaching and learning**, NC: Information Age Publishing, 2007.

LEUNG, A.; BACCAGLINI-FRANK, A. Introduction. In: LEUNG, A.; BACCAGLINI-FRANK, A. (Org.). **Digital technologies in designing mathematic education tasks**, Switzerland: Springer, 2017.

PINHO, J. L. R.; MORETTI, M. T. Estimulando a criatividade em matemática em sala de aula através da formulação e resolução de problemas em geometria. **REMATEC Revista Matemática, ensino e cultura**, v. 13, n. 28, p. 55-67,2018. ISSN 1980-3141. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n0.p284-300.id282

POVEDA, W. Resolución de problemas matemáticos en GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 26-42,2020. ISSN 2237-9657. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p26-42

POVEDA, W.; GARCÍA-CUÉLLAR, D. Estrategias asociadas al uso de GeoGebra en un contexto de resolución de problemas. **REMATEC Revista Matemática, ensino e cultura**, *[S. l.]*, v. 16, n. 37, p. 61–79, 2021. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p61-79.id252

POLYA (1957). **How to solve it: A new aspect of mathematical method (2nd ed.)**. Anchor Books. (Original work published 1945), 1957.

ROSSI, M.; MELLO, G. J. Oficina maker "do lixo ao luxo" como meio para favorecer a aprendizagem de estudantes. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 1, p. e23034, 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.14963

SANTOS-TRIGO, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. En S. Lerman (Orgs.), **Encyclopedia of mathematics education** (2nd ed., pp. 686–693). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129

SANTOS-TRIGO, M.; CAMACHO MACHÍN, M. Framing the use of computational technology in problem solving approaches. **The Mathematics Enthusiast**, v. *10*(1–2), 2013, p. 279–302.

SCHOENFELD, Alan H. Commentary on Part III of Mathematical Challenges For All: On Problems, Problem-Solving, and Thinking Mathematically. In Leikin, R. **Mathematical Challenges For All**. Israel: Cham: Springer International Publishing, 2023. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8 .

SCHOENFELD, A. **Mathematical problem solving**. Academic Press, 1985.

SCHOENFELD, A. Method. In: LESTER, F. (Org.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, New York: MacMillan, 2007.

THEZOLIN, A. L.; PIRES, R. F. Modelagem matemática: contribuições de um curso de formação de professores. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 10, n. 2, p. e22028, 2022. https://doi.org/10.26571/reamec.v10i2.13527

TORREGROSA, G.; QUESADA, H. Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. **RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. *10*(2), 2007, p. 275–300. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500205. Acceso em: 27 jan, 2023.

VILLALTA, M. Análisis de la conversación: Una propuesta para el estudio de la interacción didáctica en sala de clase. **Estudios Pedagógicos (Valdivia)**, v. *35*(1), 2009, p. 221–238. https://doi.org/10.4067/S0718-07052009000100013

XAVIER, J. L. de A.; ANDRADE, A. N. de .; LEANDRO, C. G.; CHAGAS, N. C. das. Análise bibliométrica sobre práticas pedagógicas com tecnologias digitais em tempos de COVID-19. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 1, p. e23033, 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.14917

ANEXO 1 - INFORMACIÓN SOBRE EL MANUSCRITO

AGRADECIMIENTOS
A la Escuela de Matemática de la Escuela de Matemática por el apoyo brindado.

FINANCIACIÓN
No aplica.

CONTRIBUCIONES DE AUTORÍA
Resumen/ Resumen/Abstract: William Enrique Poveda Fernández
Introducción: William Enrique Poveda Fernández
Referencial teórico: William Enrique Poveda Fernández
Análisis de datos: William Enrique Poveda Fernández
Discusión de resultados: William Enrique Poveda Fernández
Conclusión y reflexiones finales: William Enrique Poveda Fernández
Referencias: William Enrique Poveda Fernández
Revisión del manuscrito: William Enrique Poveda Fernández
Aprobación de la versión final publicada: William Enrique Poveda Fernández

CONFLICTOS DE INTERÉS

El autor declara que no existe ningún conflicto de interés personal, comercial, académico, político o financiero con respecto a este manuscrito.

DISPONIBILIDAD DE DATOS DE INVESTIGACIÓN

El autor declara que pondrá a disposición los datos de la investigación en caso sea solicitado.

PREIMPRESIÓN

No publicado.

CONSENTIMIENTO PARA UTILIZAR LA IMAGEN

No Aplica.

APROBACIÓN DEL COMITÉ DE ÉTICA DE LA INVESTIGACIÓN

No Aplica.

CÓMO CITAR - ABNT

POVEDA, William. Estudio de cuadriláteros basado en resolución de problemas y uso de GeoGebra. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 11, n. 1, *e*23114, enero/diciembre de 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16863

CÓMO CITAR - APA

Poveda, w. (2023). Estudio de cuadriláteros basado en resolución de problemas y uso de GeoGebra. *REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, *11*(1), *e*23114. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16863

POLÍTICA DE RETIRO - CROSSMARK/CROSSREF

Check for updates

Los autores y editores asumen la responsabilidad y el compromiso con los términos de la Política de Descargo de Responsabilidad de la Revista REAMEC. Esta política está registrada en Crossref con el DOI: https://doi.org/10.26571/reamec.retratacao

PUBLISHER

Universidad Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicación en el Portal de Periódicos de la UFMT. Las ideas expresadas en este artículo son responsabilidad de sus autores, no representando necesariamente la opinión de los editores o de la referida universidad.

EDITORES

Dailson Evangelista Costa

Luis Andrés Castillo

EDITORA CONVIDADA
Daysi Julissa García-Cuéllar

ARBITROS
Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres.

HISTÓRICO
Submetido: 17 de septiembre de 2023.
Aprovado: 22 de noviembre de 2023
Publicado: 18 de Dezembro de 2023