REAMEC
REVISTA DA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

QUADRATURA DO CÍRCULO E CUBATURA DA ESFERA COM GEOGEBRA NO ENSINO MÉDIO

SQUARING THE CIRCLE AND CUBATE THE SPHERE WITH GEOGEBRA IN HIGH SCHOOL

CUADRA EL CÍRCULO Y CUBA LA ESFERA CON GEOGEBRA EN SECUNDARIA

Adriana de Bortoli[*] Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva[**]

Edwin Jun Iassanori Yassunaga[***] Nadya Sofia Kuriyama Sato[****]

RESUMO

Neste texto apresentamos os resultados de uma pesquisa desenvolvida a partir de um curso de extensão universitária, oferecido a estudantes de 2ª e 3ª séries do Ensino Médio de uma escola pública de um município do interior do Estado de São Paulo, Brasil. A investigação objetivou explorar possíveis articulações entre História da Matemática e o uso de tecnologias digitais na aplicação de tarefas voltadas ao ensino e aprendizagem de Matemática. Especificamente, considerando-se um problema presente no Papiro de Rhind, explorou-se a quadratura de um círculo, e consequentemente a cubatura de uma esfera, utilizando-se o *software* GeoGebra. Os procedimentos envolvendo produção e análise de dados envolveram as seguintes vertentes: estudo de caso qualitativo, registro e análise de vídeos, análise de registros escritos e digitais dos sujeitos, diário de campo e triangulação de dados. Verificamos resoluções/estratégias de exploração emergentes em estudos anteriores e apontamos uma reflexão sobre as diferenças de construção em um ambiente 2D e 3D. Na exploração da quadratura do círculo, discutimos aspectos referentes às preferências dos cursistas em desenvolver simulações/experimentações utilizando o computador ou o celular. Na exploração da cubatura da esfera, destacamos mobilização de raciocínio algébrico para resolução de problemas geométricos. Este estudo contribui com a pesquisa acerca de questões sobre a interface História da Matemática e o uso de tecnologias digitais, pontuando possibilidades acerca do desenvolvimento de experiências estéticas.

Palavras-chave: História da Matemática. Tecnologias Digitais. Estética. Ensino Médio. GeoGebra.

[*] Doutora em Educação Matemática pela UNESP de Rio Claro. Docente de Ensino Superior da Faculdade de Tecnologia Professor Antonio Seabra de Lins (FATEC), Lins, São Paulo, Brasil. Endereço: Estrada Mário Covas Júnior (Lins-Guaimbê) Km 1, CEP 16403-025, Lins, São Paulo, Brasil. E-mail: adrianadebortoli1@hotmail.com.

[**] Doutor em Education Studies pela University of Western Ontario (UWO), Canadá. Docente do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil. Endereço: Rua Cristóvão Colombo, 2265, Bairro Jardim Nazareth, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil. CEP 15054-000. E-mail: ricardo.scucuglia@unesp.br.

[***] Graduando em Análise e Desenvolvimento de Sistemas pela da Faculdade de Tecnologia Professor Antonio Seabra de Lins (FATEC), Lins, São Paulo, Brasil. Endereço: Estrada Mário Covas Júnior (Lins-Guaimbê) Km 1, CEP 16403-025, Lins, São Paulo, Brasil. E-mail: edwinjunyassunaga@gmail.com.

[****] Graduanda em Análise e Desenvolvimento de Sistemas pela da Faculdade de Tecnologia Professor Antonio Seabra de Lins (FATEC), Lins, São Paulo, Brasil. Endereço: Estrada Mário Covas Júnior (Lins-Guaimbê) Km 1, CEP 16403-025, Lins, São Paulo, Brasil. E-mail: sankstar@outlook.com.

ABSTRACT

In this paper we present the results of a research developed from a knowledge mobilization course offered to high school students in a public school in a city in the interior of the State of São Paulo, Brazil. The investigation aimed to explore possible articulations between the history of mathematics and the use of digital technologies in the application of tasks aimed at teaching and learning mathematics. Specifically, considering a problem present in the Rhind Papyrus, the squaring of a circle was explored, and consequently the cubature of a sphere, using the GeoGebra software. The procedures involving data production and analysis involved the following aspects: qualitative case study, recording and analysis of videos, analysis of written and digital records of the participants, field notes and data triangulation. We verified emerging exploratory resolutions/strategies in previous studies, pointing out a reflection on the construction differences in a 2D and 3D environment. In exploring the squaring of the circle, we discuss aspects related to the participants' preferences in developing simulations/experiments using the computer or cell phone. In the exploration of the cubature of the sphere, we highlight the mobilization of algebraic thinking to solve geometric problems. This study contributes to the research on issues about the interface between history of mathematics and the use of digital technologies, pointing out possibilities for the development of aesthetic experiences.

Keywords: History of Mathematics. Digital Technologies. Aesthetics. High school. GeoGebra.

RESUMEN

En este artículo presentamos los resultados de una investigación desarrollada a partir de un curso de movilización de conocimientos ofrecido a estudiantes de secundaria en una escuela pública de una ciudad del interior del Estado de São Paulo, Brasil. La investigación tuvo como objetivo explorar posibles articulaciones entre la historia de las matemáticas y el uso de las tecnologías digitales en la aplicación de tareas destinadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Específicamente, considerando un problema presente en el Papiro Rhind, se exploró la cuadratura de un círculo, y consecuentemente la cubicación de una esfera, utilizando el software GeoGebra. Los procedimientos de producción y análisis de datos involucraron los siguientes aspectos: estudio cualitativo de casos, grabación y análisis de videos, análisis de registros escritos y digitales de los participantes, notas de campo y triangulación de datos. Verificamos resoluciones/estrategias exploratorias emergentes en estudios previos, señalando una reflexión sobre las diferencias de construcción en un entorno 2D y 3D. Al explorar la cuadratura del círculo, discutimos aspectos relacionados con las preferencias de los participantes del curso para desarrollar simulaciones/experimentos usando la computadora o el teléfono celular. En la exploración de la cubicación de la esfera, destacamos la movilización del pensamiento algebraico para resolver problemas geométricos. Este estudio contribuye a la investigación sobre sobre la interfaz de la historia de la matemática y el uso de tecnologías digitales, señalando posibilidades para el desarrollo de experiencias estéticas.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas. Tecnologías digitales. Estética. Escuela secundaria. GeoGebra.

1 INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentamos resultados de uma pesquisa que objetivou investigar articulações entre História da Matemática e o uso de tecnologias digitais na exploração de atividades voltadas ao ensino-aprendizagem de Matemática. Especificamente, buscou-se explorar questões acerca do uso do *software* GeoGebra a partir de problemas históricos, como o problema 48 que consta no *Rhind Mathematical Papyrus* (RMP), cujo enunciado é: "compare a área de um círculo com a de seu quadrado circunscrito". Assim, foram propostas, a estudantes de 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, atividades sobre a quadratura do círculo e a cubatura da esfera. Nesse sentido, buscamos responder ao seguinte questionamento: como ocorre a investigação da quadratura do círculo e da cubatura da esfera com o GeoGebra em atividades exploradas por estudantes do Ensino Médio?

A História da Matemática é uma relevante área de conhecimento e de investigação em Educação Matemática. Como metodologia de ensino, pode oferecer meios para que aulas sejam mais dinâmicas e interessantes. Ao explorar aspectos históricos da matemática, o professor pode construir com seus alunos alguns significados específicos de ideias matemáticas desenvolvendo, assim, alternativas pedagógicas. O usufruto didático da história dos conhecimentos matemáticos ensinados no espaço escolar oferece meios para a construção de um posicionamento crítico sobre o assunto, proporcionando reflexões acerca das relações envolvendo história, cultura e linguagem.

De acordo Miguel e Miorim (2004), a abordagem histórica dos conteúdos é uma alternativa para a significação e desmistificação da Matemática. A forma lógica com que essa ciência é apresentada aos estudantes em ambientes escolares não reflete a forma como ela foi criada, a partir de tentativas e erros, envolvendo a colaboração de diferentes povos em épocas distintas. Para esses autores, a abordagem histórica dos conteúdos matemáticos serve como suporte para se atingir objetivos pedagógicos que levem os estudantes a perceberem a Matemática como uma criação humana; as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática; as necessidades práticas, sociais e econômicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; as conexões existentes entre Matemática e Filosofia, Matemática e religião, Matemática e Lógica, etc.; a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da Matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

O problema da quadratura do círculo, isto é, a tentativa de se construir um quadrado que tenha a mesma área que a de um círculo dado, é um dos problemas matemáticos clássicos difundidos antes de Euclides e que despertou interesses por sua resolução. Desde a antiguidade, buscou-se uma solução para a quadratura do círculo. Os egípcios, a exemplo, determinaram uma aproximação tomando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado (EVES, 2011).

> O primeiro grego conhecido cujo nome se liga ao problema é Anaxágoras (c. 499-c. 427 a.C.), mas sua contribuição é desconhecida. Hipócrates de Quio, um contemporâneo de Anaxágoras, teve sucesso na quadratura de certas lunas especiais, ou figuras em forma de lua limitadas por dois arcos de circunferência, provavelmente na expectativa de que suas investigações pudessem levar à solução do problema da quadratura. Alguns anos mais tarde, Hípias de Elis (c. 425 a.C.) inventou uma curva que se tornou conhecida como quadratriz. Essa curva resolve tanto o problema da trissecção como o da quadratura, mas a tradição não é unânime sobre quem a usou primeiro na quadratura. É possível que Hípias a tivesse usado para trisseccionar ângulos e que Dinostrato (c. 350 a.C.), ou algum outro geômetra posterior, a tivesse aplicado ao problema da quadratura. Arquimedes (c. 225 a.C.) também apresentou uma resposta para o problema com a espiral de Arquimedes (EVES, 2011, p. 140).

Outro problema histórico interessante na Matemática é a cubatura de uma esfera, ou seja, a determinação do volume de uma esfera buscando-se construir um cubo de mesmo volume (GÓNGORA, 2008). Desde as antigas civilizações até os avanços modernos, a mensuração precisa do volume de uma esfera foi um problema que estimulou muitos estudiosos ao longo dos séculos. Os antigos gregos já exploraram esse desafio, com matemáticos como Arquimedes desenvolvendo métodos aproximados para calcular o volume de uma esfera. A busca por uma fórmula exata para a cubatura da esfera foi um dos problemas mais desafiadores na História da Matemática.

Foi apenas no século XVII, com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, que surgiram as ferramentas matemáticas necessárias para abordar essa questão de forma mais precisa. No século XIX, o matemático alemão Karl Weierstrass fez contribuições significativas para a teoria da cubatura de esfera, estabelecendo resultados importantes sobre a relação entre o volume de uma esfera e as integrais curvilíneas. Embora a fórmula exata para a cubatura de uma esfera tenha sido alcançada apenas recentemente, o estudo desse problema ao longo da história mobilizou muitos estudos por diversos matemáticos. Tanto a quadratura do círculo quanto a cubatura da esfera são problemas que remetem à busca pela determinação ou estimativa no número π (SMEUR, 1970).

Além disso, no âmbito do presente artigo, é importante destacar que as discussões sobre o uso de tecnologias digitais em Educação Matemática envolvem aspectos diversos acerca de conceitos, práticas pedagógicas e processos formativos voltados ao ensino-aprendizagem de Matemática. Na literatura, o conceito denominado “tecnologia digital” está intrínseco e historicamente relacionado a outros termos como “tecnologia informática” e “tecnologia da informação e comunicação”. Também, o próprio conceito de “tecnologia” tem sido filosoficamente problematizado. Diversos autores, ao conceituarem tecnologia como “o estudo das técnicas”, discutem a relação entre linguagem e mídia.

Mesmo reconhecendo a pluralidade conceitual acerca do significado de “tecnologia”, convencionalmente em Educação Matemática o termo “tecnologia digital” tem sido utilizado como referência a dispositivos ou recursos informáticos diversos como computadores, *softwares, smartphones*, Internet, aplicativos, vídeos, redes sociais e muitos outros. É sobre essa dimensão de caráter “pragmático” que as fases das tecnologias digitais são discutidas em Educação Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). Em particular, o *software* GeoGebra reorganizou qualitativamente perspectivas como a simulação e a experimentação com tecnologias, pois seu design multiplataforma, seu acesso gratuito e a abertura de seu código têm permitido a combinação dos Sistemas de Computação Algébrica e de geometria dinâmica, bem como a criação de muitas ferramentas e recursos. De maneira geral, o uso do GeoGebra deu origem ao que se entende por matemática dinâmica, explicitando a relevância da dimensão heurística do fazer matemático em cenários educacionais.

No presente estudo, também exploramos algumas questões sobre *experiência estética* em Educação Matemática (SCUCUGLIA; IDEM, 2021). Nesse cenário, experiência matemática estética é compreendida como “uma noção que busca criar ou analisar os contextos em que possibilitam experiências estéticas integradas ao ensino, aprendizagem ou formação de professores de Matemática” (SCUCUGLIA; IDEM, 2021, p. 40). Em particular, esse conceito pode envolver o “aspecto pedagógico da experiência estética (...) ou da noção de Educação pela Arte (...) a contextos de aprendizagem, ensino ou formação que evidenciam a estética matemática (...) e/ou a integração de artes, tecnologias digitais e ideias matemáticas” (SCUCUGLIA; IDEM, 2021, p. 40).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

D’Ambrósio (2012) destaca o papel motivador da história nas aulas de matemática, desfazendo a ideia de uma ciência cristalizada. Para D’Ambrósio (2012, p. 29), “do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta”. Miguel e Miorim (2004) também destacam a importância da história no processo de ensino-aprendizagem de matemática como um estímulo a não-alienação do seu ensino. Para eles, a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao estudante não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido, levando os estudantes a perceberem essa ciência como uma coleção arbitrária de objetos sem conexão e sentido. Nessa perspectiva, entende-se que a presença da História da Matemática em sala de aula constitui um recurso pedagógico ao qual o professor pode recorrer para auxiliar os estudantes na construção do significado do que se está trabalhando. É possível também que o professor recorra a processos históricos como facilitadores ou condutores do processo de aprendizagem, sem que a História da Matemática seja explicitamente citada.

Além disso, Miguel e Miorim (2004) destacam diferentes argumentos a favor da História da Matemática em sala de aula. A abordagem histórica dos conteúdos matemáticos é referência para elaboração de métodos baseados em sequências adequadas aos diferentes tópicos de ensino da Matemática escolar. A escolha de problemas históricos da Matemática, considerados motivadores da aprendizagem, também constitui um caminho que pode ser praticado pelo professor para abordar a História da Matemática em suas aulas. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2008), a presença da história nas aulas de matemática fornece a construção de uma perspectiva ampla dessa ciência. "As pessoas agem por uma razão, e tipicamente constroem seu trabalho sobre outros anteriores em uma vasta rede de colaboração entre as gerações. A informação histórica nos permite compartilhar essa 'grande figura'" humanas (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008, p. 3). Além disso, a História da Matemática possui potencial de contextualização. Nesse sentido, conhecer a composição/constituição dos conhecimentos matemáticos contribui para a compreensão sobre como essa ciência está articulada a diversas atividades humanas (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008).

Pesquisas acerca da interface História da Matemática / Tecnologias Digitais têm sido desenvolvidas na área de Educação Matemática (BORTOLI, 2020; BRUGNERA; DYNNIKOV, 2020). Nesse contexto, trabalhos como os de Sousa (2020; 2021) têm grande destaque. Na realidade, essa autora desenvolve as noções denominadas "atividades-históricas-com-tecnologias" e "investigação-histórica-com-tecnologias", as quais destacam não somente as convencionais possibilidades da História da Matemática na elaboração de tarefas matemáticas baseadas no uso de tecnologias digitais (elementos pré-textuais, informações básicas, desenvolvimento e avaliação), mas também fundamentos específicos da Investigação Matemática como:

> escolha de tema/obra/documento; estudo histórico (perspectiva atualizada); proposta de Interface entre História e Ensino; levantamento de situações/problemas/obras/documentos a serem investigados (potencialidade didáticas); escolha de software/recurso(s); e ainda, proposição de produto, validação e refinamento (SOUSA, 2021, p. 154).

Podemos ainda destacar, nesse contexto, trabalhos como o desenvolvido por Domingues (2021), que buscou explorar aspectos do pensamento diferencial e do pensar-com-GeoGebra emergentes quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre o cálculo de áreas e volumes. Neste trabalho, discutiu-se inicialmente questões sobre pensamento matemático e pensamento diferencial, propondo uma perspectiva sobre pensamento diferencial formada por quatro aspectos: noção de limite e continuidade, noção de infinitésimo, conceito de integral definida e concepção visual-geométrica. Do ponto de vista metodológico, com fundamentação na pesquisa qualitativa, foram desenvolvidos experimentos de ensino com 6 duplas de estudantes de 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, considerando a elaboração de uma tarefa composta por 5 atividades elaboradas a partir de problemas históricos da Matemática (BARON, 1985). Em termos de resultados, Domingues (2021) destaca o papel da visualização e da experimentação-com-tecnologias no desenvolvimento do pensamento diferencial dos estudantes. Em especial, enfatiza-se como os recursos ou potencialidades do *software* ofereceram meios para que os estudantes articulassem os quatro aspectos que compõem o pensamento diferencial na perspectiva proposta.

No âmbito do presente artigo, cabe destacar que, de acordo com Cooper (2011, p. 458), o Problema 48 do *Rhind Mathematical Papyrus* (RMP) assume certo caráter excepcional dentre os papiros matemáticos egípcios, “pois não contém as instruções escritas usuais que explicam ao estudante-escriba o que ele deve fazer”. Há apenas um diagrama e duas colunas com cálculos. O enunciado do Problema 48 é: “compare a área de um círculo com a de seu quadrado circunscrito”. Cooper (2011) argumenta que os cálculos presentes na resolução do Problema 48 detalham o método egípcio antigo para multiplicar 8 por 8 e 9 por 9, ou seja, trata-se de um método para calcular 8^2 e 9^2. Os historiadores da Matemática tendem a concordar que a mensagem básica do RMP 48 é a de mostrar que, quando um círculo estiver inscrito em um quadrado e sua área for 64 unidades quadradas, a área do quadrado será de 81 unidades quadradas. Para Cooper (2011), tudo o que pode ser dito com alguma certeza sobre o RMP 48 é que é uma demonstração de que a área de um círculo, quando circunscrito um quadrado, está na mesma relação que o número 64 está com o número 81. Nesse sentido, podemos inferir que o RMP 48 é um problema que visa calcular a área de um círculo.

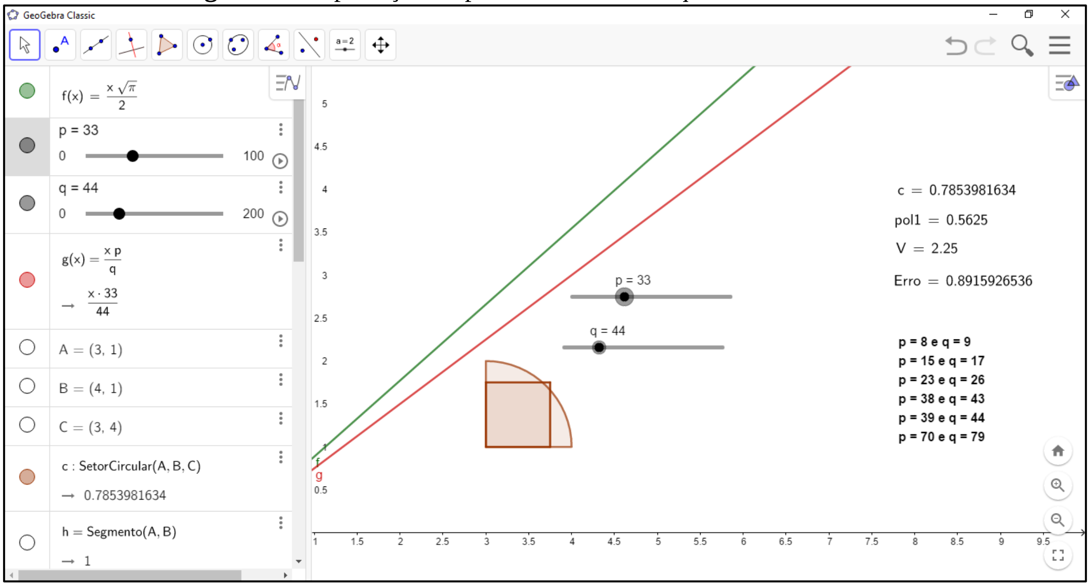
> Para calcular a área de um círculo, pode-se criar um quadrado cujos lados são iguais a 8/9 do comprimento do diâmetro do círculo (e, portanto, cujos lados são iguais a 8/9 do comprimento de cada lado do quadrado circunscrito do círculo). A área do círculo será então equivalente à área do quadrado de “8/9 do diâmetro”. Este é o processo visto nos problemas 41, 42 e 50 do RMP. O segundo entendimento em evidência no

> Problema 48, e como já afirmado, é que a área de um círculo estará em relação à área do quadrado circunscrito desse círculo, assim como o número 64 está para o número 81. (...) A mudança sutil de foco do segundo ponto permite que se prossiga por um caminho muito diferente no que diz respeito aos *circular calculations*, um caminho que pode ter sido uma razão proeminente não apenas por trás da decisão de incluir o Problema 48 no texto do RMP em primeiro lugar, mas também pela maneira específica como foi apresentado (COOPER, p. 460, 2011).

Nesse cenário, como discutido por Scucuglia et. al (2021), em um processo genuinamente heurístico baseado em procedimentos envolvendo estimativas e medidas, pode-se inferir que, para os egípcios na antiguidade, $(8/9)^2$ é uma "boa" aproximação para o valor da medida da área da região delimitada pelo quadrante de círculo de raio 1. Ou seja, em um processo de resolução na interface da geometria com a aritmética, podemos expressar, em notação moderna, $(8/9)^2 \approx \frac{\pi}{4}$. Em Scucuglia et. al. (2021), foi investigado como professores de Matemática em formação continuada exploram esse problema com base no uso do *software* GeoGebra. Na realidade, propôs-se aos professores de Matemática que, utilizando recursos computacionais, fosse determinada a razão $\frac{p}{q}$ com p e q primos entre si, de modo que $\frac{p}{q}$ seja uma "boa" aproximação para $\left(\frac{p}{q}\right)^2 \approx \frac{\pi}{4}$ (GRANDE; SCUCUGLIA, 2021).

Em particular, Scucuglia et. al. (2021) discutem uma situação em que um grupo de professores se propôs a investigar $p = q\frac{\sqrt[2]{\pi}}{2}$ com o auxílio de *software*. No entanto, eles exploraram a inclinação de $\frac{\sqrt[2]{\pi}}{2}$. De fato, contrastando a irracionalidade de $\frac{\sqrt[2]{\pi}}{2}$ com a racionalidade de p/q, o grupo com o *software* construiu outra reta com uma "inclinação racional" e, então, este par $(p\ /\ q)$ seria exatamente a fração que eles estavam procurando. Assim, p/q seria aproximado a $\frac{\sqrt[2]{\pi}}{2}$ em relação à aproximação das inclinações. Quando mudaram os valores de p ou q na construção, obtiveram outra reta. No GeoGebra (Figura 1), a linha vermelha era a "inclinação racional" e a linha verde era a "inclinação irracional". Portanto, animando os valores para p e q, eles identificaram candidatos para (p, q) quando as linhas se sobreporiam intimamente (GRANDE; SCUCUGLIA, 2021).

Figura 1 – Exploração de professores sobre a quadratura do círculo.



Fonte: Scucuglia et. al (2021)

Nesse caso, consideraram diversos valores para p e q, tais como: p = 15 e q = 17; p = 23 e q = 26; p = 39 e q = 44; p = 70 e q = 79. Para comparar os valores e analisar qual par melhor corresponderia a uma solução potencial, o grupo criou a função “Erro = | π-V |”, que mostra a diferença entre o valor de π e quatro vezes a área do quadrado, uma vez que o problema é explorado no primeiro quadrante do círculo. Assim, conjeturaram que $(39/44)^2 \cong \pi / 4$. A interface História da Matemática / uso de tecnologias digitais tem se mostrado interessante do ponto de vista pedagógico-matemático-heurístico (GRANDE; SCUCUGLIA, 2021).

3 METODOLOGIA

Em termos de fundamentos metodológicos, a presente pesquisa é de natureza qualitativa (BICUDO, 1993), considerando especificamente a noção de *estudo de caso qualitativo*.

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objectivo é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse (PONTE, 2006, p. 2).

3.1 O Cenário

As sessões de ensino (encontros) que deram origem ao estudo de caso relatado neste artigo ocorreram na Escola Estadual Professor Octacílio Sant'anna, na cidade de Lins (SP). Inicialmente, foi feito um convite aos estudantes matriculados nas duas últimas séries do Ensino Médio para participar do curso de extensão universitária intitulado "Desenvolvimento de Problemas Históricos com o uso do GeoGebra". Dos 23 estudantes que manifestaram interesse pelo curso, 12 foram selecionados mediante um sorteio. Durante o desenvolvimento deste estudo, 10 estudantes participaram efetivamente das sessões, sendo 5 da 2ª série do Ensino Médio e 5 da 3ª série do Ensino Médio com idades entre 15 e 18 anos.

As atividades foram conduzidas em 4 encontros, com 2 horas de duração cada, tendo uma semana de intervalo entre as sessões, e ocorreram entre 10 de maio de 2023 e 10 de junho de 2023, no período vespertino, que era o contraturno das aulas dos estudantes. O objetivo do curso de extensão foi explorar/investigar, de um ponto de vista estético, possíveis articulações entre História da Matemática e o uso de tecnologias digitais no ensino-aprendizagem de Matemática. Todas as observações feitas nos encontros foram registradas por meio de filmagens do ambiente e do software GeoGebra, as quais serviram como registro da produção de dados.

No trabalho desenvolvido, foram obtidas as devidas autorizações dos responsáveis e estudantes para a utilização de imagens, nomes e transcrições de fala, por meio do preenchimento de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e um Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE).

3.2 As Atividades

Na presente pesquisa utilizamos, de maneira adaptada, duas atividades originalmente elaboradas por Domingues (2021), as quais apresentamos em anexo. Embora a atividade tenha sido apresentada na íntegra aos estudantes, a seção 2 de cada atividade – "Explorando aproximações para π" – não foi explorada pelos estudantes durante o curso de extensão. As atividades foram concebidas de forma a incentivar os estudantes a dialogarem, manipularem e investigarem os pensamentos emergentes, buscando uma aproximação com os problemas apresentados. A cada cenário criado e explorado pelos participantes, eram levantadas reflexões sobre sua adequação e possíveis melhorias, gerando novas investigações. As atividades foram planejadas e conduzidas utilizando o *software* GeoGebra. A escolha desse *software* como ambiente de investigação foi motivada pela intenção de explorar suas potencialidades sob uma perspectiva educacional, pressupondo que o uso do GeoGebra permitiria a incorporação de elementos do pensamento computacional e experiências estéticas no ensino de Matemática.

Em cada encontro, os participantes receberam as atividades impressas com sugestões de procedimentos para exploração/experimentação utilizando o *software*, visando estimular discussões e ilustrar o objeto de investigação e sua construção. Vale considerar que os estudantes não tinham um conhecimento prévio do *software*, por essa razão utilizamos um certo tempo do curso com a apresentação das funcionalidades do GeoGebra.

Nos encontros 1 e 2 foi desenvolvido o problema da *Quadratura do Círculo*. Essa atividade tem como objetivo calcular a área de região limitada pelo círculo por meio da estratégia de cálculo por aproximação, que consiste em explorar e comparar a área de regiões conhecidas com a área desejada. A definição de área não foi de antemão apresentada aos estudantes, deixamos subentendido como uma medida de superfície de uma figura que pode ser calculada por diversos procedimentos. Nessa atividade, Domingues (2021) usou uma estratégia de cálculo desenvolvida no Egito antigo (BARON, 1985), que consiste em encontrar a área de um quadrado equivalente à área do círculo e, a partir disso, explorar aproximações para o valor de π. Entretanto, em nosso estudo de caso, durante a realização prática da atividade com os participantes desta pesquisa, foi dito aos estudantes que na época do problema não havia a fórmula para o cálculo da área do círculo, de modo que foi sugerido a eles pensarem em uma figura conhecida por eles que pudesse ter área de valor próximo ao valor da área do círculo.

Já nos encontros 3 e 4 foi apresentado o problema *Cubatura da Esfera*, em que os estudantes fizeram uso do ambiente 3D, com o objetivo de investigar aproximações para o cálculo do volume da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, também trazendo o GeoGebra como ambiente de investigação e experimentação. Nesse sentido, como desdobramento da atividade anterior, foi proposta uma nova atividade que foi trabalhada no ambiente tridimensional, com o intuito de determinar o volume de uma esfera por meio da estratégia de cálculo por aproximação. De maneira semelhante à atividade anterior, não explicitamos a definição de volume, contudo a consideramos como uma grandeza que representa o espaço que um dado sólido geométrico ocupa, de modo que seja possível utilizar diferentes estratégias para o seu cálculo. Semelhantemente à condução da atividade anterior, usamos a ideia de aproximar o volume de uma esfera ao volume de um cubo. Os estudantes utilizaram de estratégias parecidas que foram aplicadas na quadratura do círculo, adaptando-as ao ambiente tridimensional.

4 ANÁLISE E RESULTADOS

A análise dos dados desta pesquisa consiste na observação e identificação de eventos críticos compreendidos pelos pesquisadores frente às resoluções dos estudantes em relação aos problemas propostos que foram anotados em diários de campo, filmagem e gravação dos encontros conforme recomendado por Powell, Francisco e Maher (2004), além dos produtos que foram construídos no GeoGebra pelos estudantes. Assim, apresentamos os resultados a partir de uma articulação entre essas fontes de dados, visando responder ao seguinte questionamento: como ocorre a investigação da quadratura do círculo e da cubatura da esfera com o GeoGebra em atividades exploradas por estudantes do Ensino Médio? Apresentamos nossos resultados em duas subseções. A primeira diz respeito à quadratura do círculo e a segundo se refere à cubatura da esfera.

4.1 Investigando o Problema da Quadratura do Círculo

No primeiro encontro, todos portavam computadores, uma vez que as atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática da escola, onde foi desenvolvido o curso de extensão. Também foram distribuídas, aos estudantes, cópias das instruções do que fazer no GeoGebra para o desenvolvimento do problema. Entretanto, pelo fato de ser o primeiro contato com o assunto, os estudantes apresentaram uma certa dificuldade na hora de construírem a Quadratura do Círculo, mesmo tendo em mãos um passo a passo da atividade. Apesar dos contratempos, os participantes conseguiram concluir a primeira etapa da atividade e foram instigados a fazerem a atividade com outras formas geométricas.

O segundo encontro ocorreu uma semana após o primeiro. Começamos instruindo os participantes a desenvolverem a Quadratura do Círculo e outra forma de acharem uma aproximação utilizando o GeoGebra pelo celular, e, com isso, compararmos os resultados obtidos com os resultados visualizados no encontro anterior. Em uma primeira análise, achávamos que os estudantes iriam preferir utilizar o celular para construírem o problema, por conta do uso no cotidiano. Assis, Bairral e Marques (2018) afirmam que, com a onipresença de tecnologias digitais móveis, um simples toque em uma tela sensível é capaz de realizar ações inimagináveis com a utilização do mouse. Também, Göttsche (2012) aponta que os indivíduos mais jovens têm um forte interesse e encontram grande adequação nas tecnologias móveis em relação às suas necessidades e usos pessoais. Além disso, demonstram uma motivação superior para aprender por meio desse tipo de tecnologia. Contudo, nas atividades desenvolvidas, notamos uma preferência dos estudantes pelo uso do computador para desenvolverem a atividade. Para elucidar essa preferência optamos por um diálogo feito com a estudante Y[1] e o estudante K, ambos da 2ª série, que apresentaram dificuldades acerca do uso do smartphone.

> *Y: ... a tela do celular é pequena e que <u>com o tamanho do dedo, não dá para chegar em uma proximidade igual a área do círculo</u>.*
> *Pesquisadora: Por quê? É difícil arrastar, é isso?*
> *Y: Sim, o dedo é maior e não chega no ponto certo. Sempre passa ou fica menor*
> *Pesquisadora: Tá, então você não consegue encontrar uma boa aproximação para o lado por conta da dificuldade do touch e no computador deu certo?*
> *Y: Sim, porque com o <u>mouse é mais fácil de mover</u>, como a pontinha do mouse é menor dá para arrastar melhor.*
> *Pesquisadora: E qual é o outro comentário que vocês fizeram acerca da dificuldade do celular?*
> *Yasmin: Que a tela do celular é pequena, então <u>no computador fica mais fácil,</u> aparece mais coisa, <u>não precisa ficar mexendo muito</u>. Tem o resultado mais preciso.*
> *Pesquisadora: E o K tinha falado outra coisa, não era? Tinha a ver com as funcionalidades do aplicativo. Qual é a diferença?*
> *K: Ah professora, eu acho que <u>o computador é melhor porque tem mais funções</u> também e é mais difícil usar no celular*
> *Pesquisadora: Por quê? Tem que ficar buscando as funções, é isso?*
> *K: Sim, e também tem vezes que a gente clica naquele lugar na tela do celular e não vai. Tem que voltar muito para achar as funções.*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes, 2023).

Outra situação que evidenciou a dificuldade em relação ao *touchscreen* foi mencionada pelo estudante J que, na tentativa de uma aproximação para o lado do quadrado que ele tentava construir, não conseguiu, uma vez mais pelo tamanho do dedo, acertar o ponto 0,8 exatamente em cima do eixo. Além disso, ele relata que precisa ativar uma função no GeoGebra para conseguir posicionar o ponto 0,8 em cima do eixo, segundo relato a seguir:

> *J: a diferença do celular é que quando eu vou tentar colocar o polígono regular no 0,8 ele meio que dá uma dificuldade, tem que colocar meio que fora.*
> *Pesquisadora: Você não consegue acertar o 0,8 em cima do eixo x?*
> *J: vou tentar colocar e não dá, sempre em cima ou embaixo do eixo.*
> *Pesquisadora: então como você faz?*
> *J: Eu venho aqui aí coloco em cima e <u>clico em mover</u>, depois coloco em cima do 0,8.*
> *Pesquisadora: Então você precisa usar a ferramenta de arrastar, que é o mover, é isso?*
> *J: isso.*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes, 2023).

Outra situação que podemos considerar como um empecilho nas possibilidades de experimentação que o GeoGebra proporciona ocorreu novamente com dificuldade ocasionada pelo *touchscreen*, ou seja, ao experimentar possibilidades de valores diferentes para os lados

[1] Nesse texto, usaremos apenas as iniciais dos nomes dos estudantes.

para o quadrado, os estudantes tinham que fazer os cálculos das áreas desses quadrados e, pelo celular, quando modificaram os valores dos lados dos quadrados, era preciso procurar a ferramenta área e medir a cada troca que faziam dos valores dos lados dos quadrados. Ou seja, ao arrastar o dedo para mudar o valor do lado do quadrado, o valor da área (pelo celular) não se modifica ao mesmo tempo. Essa questão ocasionou um atraso nas experimentações, considerando-se nossos planejamentos. Conforme visto pelo diálogo abaixo:

> *Pesquisadora: Você está procurando um valor para o lado do quadrado que você considera apropriado para chegar na área do setor circular, certo?*
> *J: sim.*
> *Pesquisadora: Qual é o valor da área do setor circular?*
> *J: 0,8.*
> *Pesquisadora: Então você precisa pensar em um valor para o lado do quadrado de modo que a gente consiga uma área correspondente, é isso?*
> *J: Sim*
> *Pesquisadora: Quando você arrasta para modificar o lado do quadrado, o aplicativo acompanha? Ele modifica o valor da área do quadrado sempre que você muda o lado?*
> *J: Não. Eu acho que não porque toda vez que eu arrasto eu coloco na ferramenta de área aí eu clico no quadrado e dá 0,7...*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes, 2023).

Corroboramos com Bairral (2017), quando afirma que manipulações em tela constituem uma nova forma de manifestação de linguagem e possuem particularidades e implicações em nosso pensamento. Ao tocarmos a tela do nosso dispositivo móvel, deixamos transparecer e materializar o pensamento no ato comunicativo, inclusive, para favorecer uma interação. No caso analisado em nosso estudo, a construção do conhecimento matemático foi proporcionada a eles em dois vieses, de modo que pudessem fazer uso tanto do celular como do computador.

Assis, Bairral e Marques (2018, p. 4), em pesquisa com estudantes do Ensino Médio, dizem que "ao pensarmos na introdução da tecnologia *touchscreen* como recurso com possibilidade de potencializar a construção do conhecimento por parte dos estudantes, demonstramos interesse em que o discente alcance um estágio de desenvolvimento mais elevado em relação ao que se encontra". De outra parte, em nosso estudo, em algumas situações notamos que as manipulações táteis ocasionaram dificuldades em relação à necessidade de dispor mais tempo na execução de determinadas tarefas.

As discussões sobre visualização em janelas gráficas de aplicativos ou software e da cognição corporifica envolvendo a percepção/pensamento a partir de cliques e/ou toques na tela possuem potencial para serem conceitualmente compreendidos enquanto experiência (matemática) estética. "O que distingue uma experiência como estética é a conversão da resistência e das tensões, (...), em um movimento em direção a um desfecho inclusivo e gratificante" (DEWEY, 2010, p. 139).

4.2 Investigando o Problema da Cubatura da Esfera

Na terceira semana do curso, iniciamos a exploração do segundo problema histórico: a cubatura da esfera. Inicialmente, pensamos que esta atividade levaria mais tempo para ser explorada, porém os estudantes conseguiram um bom desempenho em comparação às sessões anteriores. Após o início das atividades, o estudante J apresentou certa dificuldade em achar o volume por conta da representação gráfica, abrindo um espaço para uma boa análise entre perspectivas diferentes sobre o uso da ferramenta e da álgebra para o desenvolvimento da atividade.

> *Pesquisadora: Você está expressando uma dificuldade para encontrar esse volume, por quê?*
> *J: Porque tem que mexer, tem desenho. Se fosse só matemática seria fácil.*
> *Pesquisadora: Ah, então conta para a gente. Você não gostou do GeoGebra?*
> *J: Não. É que eu não me dou bem com questão de desenho. É normal, eu não gosto de desenhar e nada que envolva desenho.*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes, 2023).

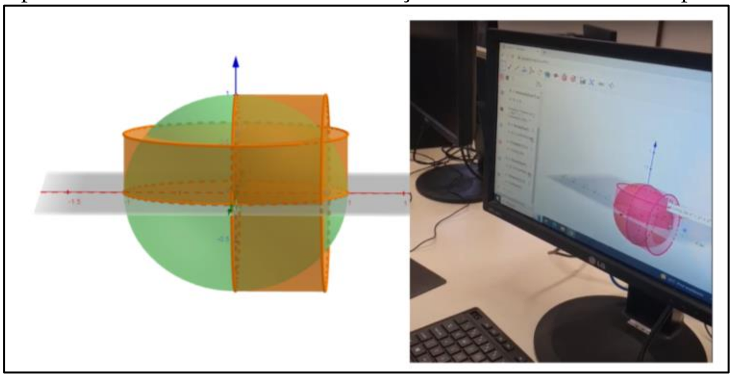
Questionado sobre outra possibilidade de resolver a atividade, ressaltou que "pelo desenho fica mais fácil de ter a noção, o desenvolvimento fica mais fácil". Porém, ainda preferiria usar a fórmula do volume da esfera e comparar com a do cubo. Entretanto, com outra perspectiva, o estudante K e a estudante Y constataram que algebricamente seria muito mais difícil e que a ferramenta os auxilia na construção por conta da rapidez e da praticidade do uso.

> *K: Sem o GeoGebra eu não sei não.*
> *Y: Nossa, fazer conta seria muito difícil.*
> *K: GeoGebra ajuda bastante.*
> *Pesquisadora: Por quê?*
> *K: É mais rápido, mais prático, eu acho que ninguém iria parar para fazer conta.*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes, 2023).

Seguindo essa mesma linha de pensamento (de comparativos visuais com outras figuras apoiado pelo uso do software), o estudante V desenvolveu uma outra possibilidade de resolução, a partir de cilindros (Figura 2). No entanto, para este estudante, a opção com cilindros apresentava alguns limitantes. Assim, ele aponta a sua preferência pelo visual apoiado pela tecnologia ao uso de fórmulas, contudo com a opção de outra figura geométrica, conforme excerto abaixo:

> *Pesquisador: Então vou plantar uma sementinha: e se você usar mais cilindros e não somente um, por exemplo usar dois. Mas se fosse para pegar você preferiria fazer com outras formas geométrica ou com o cubo? Ou algebricamente, só na conta?*
> *V: Prefiro com o cubo.*
> *Pesquisador: Por que essa preferência?*
> *V: Porque é mais simples visualmente do que só na conta.*
> *Pesquisadora: Se você não tivesse essa ferramenta? Você faria um desenho?*
> *V: Sim, seguiria por esse caminho. Desenharia uma esfera e desenharia outra forma dentro para compará-las.*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes, 2023).

Figura 2 – Captura da tela da tentativa de construção usando cilindros feito pelo estudante V.



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Baseando-nos nesses diálogos, é notório a diversidade de interesses pelos métodos de resoluções apresentados pelos estudantes. O uso da álgebra foi abordado mais como um exemplo de outra forma de conseguirem resolver a atividade proposta, vários estudantes deram preferência para o uso do *software* por conta dessa praticidade. Porém, o uso dessa ferramenta pelo celular, nessa atividade, novamente se contrapõe às ideias dos autores citados anteriormente que afirmam que a tecnologia *touchscreen* é um recurso com possibilidade de potencializar a construção do conhecimento por parte dos estudantes. Paralelo a isso, a estudante M relatou suas percepções ao comparar as resoluções da atividade 2, comparando os resultados obtidos pelo celular e pelo computador.

> *M: Achar a aresta do cubo, pelo computador é mais fácil de aumentar e diminuir, diferente do celular que não dá para ver as medidas certinhas.*
> *Pesquisadora: Por que pelo celular é mais difícil?*
> *M: A visibilidade do cubo no celular é bem diferente, não dá para ter a mesma visão do computador.*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes 2023).

A preferência pelo uso do computador foi clara. Mas quando questionada sobre o que faria caso não pudesse usar o computador, a aluna respondeu que, em último caso, usaria o celular para realizar a atividade.

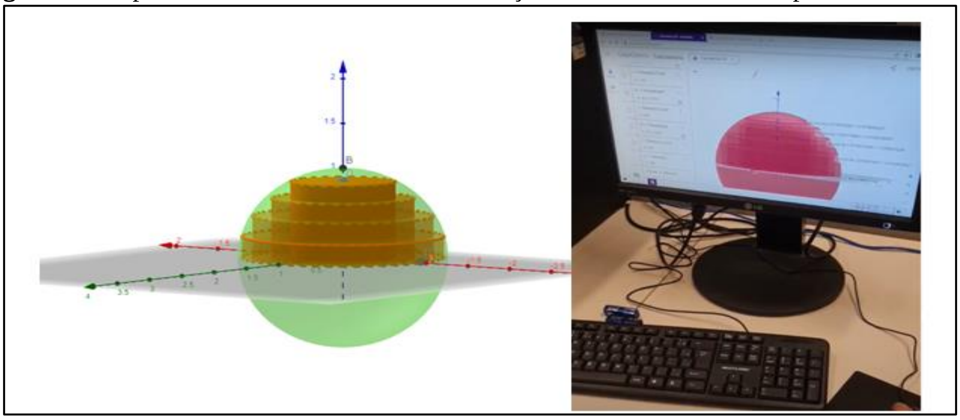
https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16747 2318-6674

No quarto e último encontro, durante as reflexões e instruções das atividades, diferentes maneiras de explorar a dinamicidade do *software* foram recomendadas aos estudantes para resolverem a atividade da Cubatura da esfera. Eles reconheceram a importância de uma visualização dinâmica utilizando o GeoGebra e ficaram cientes de que a abordagem envolve a construção sucessiva de polígonos. No entanto, expressaram dificuldades em prever e planejar exatamente como essa construção será realizada no *software*.

> *Pesquisadora: Qual é a dimensão dele, você mexeu nele? Ele se movimenta?*
> *V: Movimenta.*
> *Pesquisadora: Mas eu digo movimento no sentido da geratriz do cone, não só virar. Você tem sugestão [pesquisador]?*
> *Pesquisador: Uma coisa que eu percebi é que eles estão se prendendo muito no fato de deixarem a figura inscrita, a figura pode sair ...*
> *Pesquisadora: Pode ser circunscrita.*
> *F: Pode sair??*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes 2023).

A fim de ilustrar a discussão mencionada acima, podemos observar as figuras abaixo. A primeira delas (Figura 3) refere-se à tentativa de construção usando cilindros:

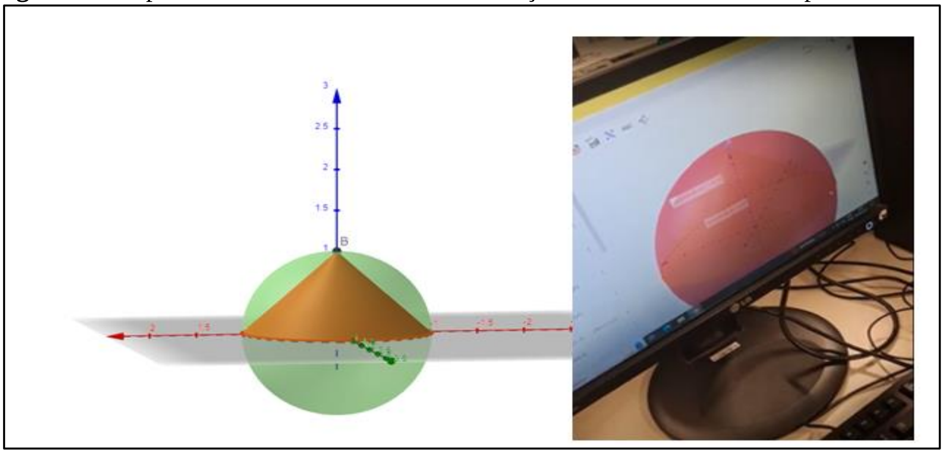
Figura 3 – Captura da tela da tentativa de construção usando cilindros feito pelo estudante V.



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na Figura 4, a construção ocorreu usando o cone. Em ambas, os estudantes não avançaram pelas limitações visuais que os impediam de seguir adiante, uma vez que eles consideravam impossível ultrapassar as fronteiras da esfera.

Figura 4 – Captura da tela da tentativa de construção usando um cone feito pela aluna M.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Outra dificuldade apresentada, que fica evidente com a surpresa na indagação do estudante, foi que eles focaram no fato de que o objeto não pode ultrapassar o limite da esfera, para os estudantes o objeto a ser comparado precisaria estar inscrito na figura. Depois da dúvida ser sanada, os estudantes F e V comentaram sobre a construção de cilindros para ter um volume aproximado à metade do volume da esfera, dessa vez com cilindros diferentes e alguns circunscritos à esfera.

> *Pesquisadora: Se vocês fizeram as contas e perceberam que esses volumes estão bem próximos. Do ponto de vista visual para vocês não está, mas as contas garantem isso e aí eu queria que vocês tentassem perceber como que as contas garantem e o olhar de vocês não é esse? Tem alguma coisa acontecendo.*
> *Pesquisador: É um detalhe.*
> *Pesquisadora: E é no desenho que vocês vão achar essa resposta.*
> *F: Ehhh, difícil explicar.*
> *Pesquisadora: Você consegue perceber V?*
> *V: Ehh não.*
> *Pesquisadora: Há uma compensação.*
> (Diálogo entre professora/pesquisadora e estudantes, 2023).

Questionados sobre as partes do cilindro que estão "sobrando fora da esfera", eles perceberam que os volumes são próximos, no entanto, não entenderam a razão disto. Querendo fazer com que eles percebessem a compensação dos volumes, mais questionamentos foram feitos, porém os estudantes acabaram não tendo essa percepção completa sobre a equivalência dos volumes nos casos em que os cilindros ultrapassassem a região da esfera. Apesar disso, o uso do GeoGebra para visualizar e manipular as figuras tridimensionais foi significativamente útil para a compreensão, proporcionando uma experiência prática e interativa.

Em alguns momentos do desenvolvimento da atividade, podemos identificar alguns indícios envolvendo o pensamento diferencial dos estudantes, no sentido proposto por

https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16747 2318-6674

Domingues (2021). O próprio design da atividade possui potencial para que os estudantes explorem noções intuitivas sobre limite e continuidade. O problema histórico explorado na atividade está associado à gênese do pensamento diferencial. Ademais, salientamos as diferenças entre as construções das atividades 1 e 2 que foram em 2D e 3D. Houve diversos relatos sobre as preferências dos estudantes em relação ao 3D, como os excertos a seguir:

> *M: professora, eu prefiro o 3D porque é mais bonito, o 2D não tem altura, fica ruim para calcular ou ver e a leitura é mais difícil. (Notas do diário de campo)*
> *P: 3D é melhor pois tem mais acessibilidade, mais diversificada, mais usável, mais prática, embora mais difícil pois tem que quebrar a cabeça. (Notas do diário de campo).*

Nessa fala, percebemos que a interpretação da construção de forma tridimensional chama a atenção da estudante, ademais facilita sua interpretação sobre essa construção. Inferimos, a partir desses comentários, que questões relacionadas à experiência estética podem influenciar a construção do conhecimento matemático em atividades baseadas no uso de tecnologias digitais com gênese em problemas históricos, no sentido proposto por Lino *et al* (2021, p. 81):

> […] a possibilidade de construção de conhecimento, de aproximação do admirador à cognição do raciocínio matemático, possibilitada pela assimilação de uma prova matemática ou da resolução de um problema que consiste em sua beleza e que é fruto de admiração estética. Assim sendo, a análise estética da resolução de um problema ou da demonstração de um teorema está diretamente ligada à sensação de percepção do próprio conhecimento, proporcionada pela resolução ou pela prova.

Sobre o episódio da cubatura da esfera, cabe destacar que questionamentos foram continuamente propostos aos estudantes ao longo do processo de exploração, visando ao aprimoramento do caráter investigativo da atividade. Nesse sentido, o processo de mediação buscou “convidar” os participantes a refletirem sobre as estratégias de resolução, o progresso alcançado e o valor encontrado. Dessa forma, a atividade manteve sua natureza investigativa e exploratória, permitindo que os participantes construíssem novos cenários, aprimorassem ideias em andamento e/ou iniciassem uma nova sequência de ideias. A dinâmica de refazer os questionamentos continuou até que os estudantes expressassem interesse em considerar algum valor como resultado final dessa atividade, mas com a consciência de que havia um caminho a ser percorrido, caso fosse necessário prosseguir com a investigação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho está inserido, de maneira geral, no escopo das pesquisas que investigam possíveis interfaces entre a História da Matemática e o uso de tecnologias digitais em Educação Matemática. Em particular, o estudo de caso relatado neste artigo enfatiza o uso do *software* GeoGebra na exploração da quadratura do círculo e da cubatura de esfera, sendo estes considerados problemas históricos "clássicos" da Matemática.

A análise realizada acerca da exploração desenvolvida por estudantes de Ensino Médio em um curso de extensão universitária revelou: (a) questões sobre visualização e design/potencialidades da mídia utilizada – dimensões de tela e funcionalidade de toque quando comparamos o uso de computador e o uso de *smartphone*; e (b) o engendramento entre formas de pensamento algébrico e geométrico na exploração de problemas sobre áreas e volumes, baseada no uso de tecnologias digitais. Reconhecemos que a literatura já apresenta vasta discussão sobre tais questões, embora tenhamos buscado, de maneira superficial, mas com "tons" de inovação, discutir questões sobre experiência estética (SCUCUGLIA; IDEM, 2021).

Em ambas atividades, a intenção de aumentar o número de casas decimais dos valores obtidos anteriormente reside na observação e validação da possibilidade de prosseguir com a investigação e buscar melhores aproximações para a atividade, explorando a relação entre a aresta do cubo e outros elementos. Os estudantes foram, portanto, engajados a utilizar o GeoGebra como mídia para produzir conhecimentos e atribuir significados matemáticos. Isso ocorria através da exploração e investigação matemática, bem como da formulação e testes de conjecturas. O objetivo era alcançar uma generalização da relação entre os elementos construídos ao longo da investigação. Durante os encontros, foram lançadas perguntas relacionadas ao raciocínio expresso verbal ou visualmente pelos estudantes, contribuindo para fomentar as explorações em andamento. Isso também promoveu nos participantes a percepção de que ainda existem caminhos a serem considerados e testados, estimulando o seu engajamento. Alguns exemplos de questionamentos utilizados ao longo de cada sessão incluem: "Por que tal ação foi realizada e existe uma abordagem mais precisa"? "Seria possível adotar uma nova estratégia de construção"? "Será que é viável fazer essa exploração de outra forma"?

Considerando os estudos de Domingues (2021) e Scucuglia et. al (2021), cabe mencionar que os estudantes não exploraram de maneira aprofundada possíveis aproximações ou estimativas de valores para π, seja via quadratura ou cubatura. Acreditamos que esse aprofundamento possui o potencial para fomentar o engendramento entre História da

Matemática e o uso de tecnologia digital no processo de exploração Matemática dos estudantes, uma vez o design da atividade engaja os participantes a investigarem a irracionalidade do π com o GeoGebra, usufruindo de uma estratégia racional/comensurável: determinar $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ para o quadrante ou $4.\left(\frac{p}{q}\right)^2$ para o círculo, por exemplo. Nesse sentido, ao identificar certa limitação nos dados produzidos, nos projetamos a aprimorar nossas ações em oportunidades futuras.

REFERÊNCIAS

ASSIS, A. R.; BAIRRAL, M. A.; MARQUES, W. S. Raciocínio de alunos em interação com dispositivos móveis: toques e retoques numéricos ou geométricos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia- RBECT**, v. 11, n. 2, p. 561-581, mai./ago, 2018. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/8459/pdf. Acesso em 19 de ago. 2023.

BAIRRAL, M. A. As manipulações em tela compondo a dimensão corporificada da cognição matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. v.10, n.2, p. 105-111, 2017. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2017v10n2p99-106

BARON, M. E., Bos, H.J.M. Unidade 3: Newton e Leibniz. *In:* **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Trad. José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F.Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pro-posições,** v. 4, n. 10, p. 18-23, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644379/11803 . Acesso em: 01 nov. 2023.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORTOLI, A. de. Saberes Docentes Para A Conjunção Entre História Da Matemática E Tecnologias Da Informação E Comunicação Nas Aulas De Matemática: Análise Do Potencial De Um Curso De Extensão. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 8, n.22, p. 19-33, 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4320. Acesso em 10 de abril 2023.

BRUGNERA, E. D.; DYNNIKOV, C. M. S. da S. GEOGEBRA, HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E GEOMETRIA ANALÍTICA. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 8, n. 3, p. 153–172, 2020. DOI: 10.26571/reamec.v8i3.10622. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/10622 . Acesso em: 8 nov. 2023.

COOPER, L. Did Egyptian scribes have an algorithmic means for determining the circumference of a circle? **Historia Mathematica.** v. 38, p. 44, 2011, 455-484. https://doi.org/10.1016/j.hm.2011.06.001

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23 ed. Campinas: Papirus, 2012. Coleção Perspectivas em Educação Matemática.

DEWEY, J. **Arte como experiência**. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

DOMINGUES, A. R. **O pensamento diferencial-com-GeoGebra de estudantes do Ensino Médio**. 2021. Dissertação (Mestrado). Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho. São José do Rio Preto, 2021. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNSP_e88c0a5f71e719af0d4e7dde16bf32b0. Acesso em: 8 nov. 2023.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. 5. ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GÓNGORA, A. R. Historia. Problemas matemáticos con historia. **UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, v. 4, n. 16, 15 dic. 2008. Disponível em: http://www.revistaunion.org/index.php/UNION/search/search. Acesso em: 8 nov. 2023.

GÖTTSCHE, K. Tecnologias Móveis: uma mais valia em contextos educacionais? **Revista Linhas,** Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 62 - 73, 2012. Disponível em: https://revistas.udesc.br/index.php/linhas/article/view/1984723813022012062 . Acesso em: 16 ago. 2023.

GRANDE, R. M.; SCUCUGLIA, R. R. S. **O símbolo e a realidade:** sobre o papel da notação matemática como auxiliar na resolução de problemas. 1. ed. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2021.

LINO, C. M. C.; ROSSETTO, D. Z.; BERTOLUCCI, G. A.; BALIEIRO FILHO, I. F. Sobre a Estética e a Resolução de Problemas: a Beleza Matemática, o Raciocínio Heurístico e a Compreensão dos Objetos e Processos Matemáticos. *In:* SCUCUGLIA, R. R. S.; IDEM, R. C. **Experiências Estéticas em Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Fi. p. 81 – 105, 2021.

MIGUEL, A. MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

PONTE, J. P. Estudo de caso em Educação Matemática. **BOLEMA:** Boletim de Educação Matemática. v. 19. n. 26, 2006. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880. Acesso em: 8 nov. 2023.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema**, v.17, n.21, p.81-140, 2004. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10538. Acesso em: 8 nov. 2023.

SCUCUGLIA, R. R. S.; BARBOSA, L. M.; BORBA, M. C.; FERREIRA, A. L. A. The Use of Digital Technology to Estimate a Value of Pi: Teachers' Solutions on Squaring the Circle in a Graduate Course in Brazil. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 23, p. 1-15, 2021. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-021-01246-1. Acesso em: 8 nov. 2023.

SMEUR, A. J. E. M. On the Value Equivalent to π in Ancient Mathematical Texts. A New Interpretation. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 6, n. 4, p. 249–70, 1970. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF00417620. Acesso em: 8 nov. 2023.

SOUSA, G.C. de, Gomes, A.B. de A. Apoio à promoção de atividades históricas com tecnologia. **Pesquisa, Sociedade e Desenvolvimento**, v.9, n.5, p.1-14, 2020. https://doi.org/10.33448/rsd-v9i5.3206.

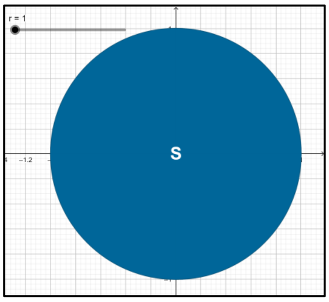
SOUSA, G. C. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 16, p. 140-159, 2021. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310

ANEXO 1 – Atividades (DOMINGUES, 2021)

Atividade 1: Quadratura do círculo

Determine a área de uma região S limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Figura 1: Região circular S

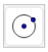


Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra.

1. Construção do cenário de investigação no GeoGebra (reduzido a um quadrante).

   a) Clique no campo "Entrada" 

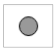
, digite a equação $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$ e pressione a tecla "Enter"  no teclado ou no GeoGebra.

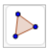
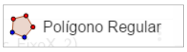
   b) Construa um quadrante circular. Para isso clique na aba "Círculo"  e selecione a ferramenta "Setor Circular" 

, em seguida clique com o mouse nas posições (0,0) e (1,0) na "Janela de visualização 2" e leve o ícone do mouse até a posição (0,1), clicando sobre ela.

   c) Calcule a área do quadrante circular construído, selecionando a ferramenta "Ângulo" , seguido de "Área" 

, e clicando sobre o objeto construído anteriormente. Esta ação será realizada sempre que for necessário calcular a área de uma figura construída com ferramentas definidas do GeoGebra.

   d) Oculte o setor circular construído no item anterior clicando sobre o ícone , presente na "Janela de Álgebra" do lado esquerdo da tela. Ao fazer isso, o ícone ficará branco . Esta ação sempre será realizada quando for necessário ocultar ou expor um objeto construído.

   e) Construa um quadrado. Para isso clique na aba "Polígono"  e selecione a ferramenta "Polígono Regular" 

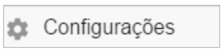
, posicionando dois vértices, o primeiro em (0,0) e o outro em qualquer ponto da abscissa, tal que $0 < x < 1$, e definindo 4 como o total de vértices.

   f) Calcule a área do quadrado.

   g) Exponha a construção do quadrante circular.

   h) Qual o valor da medida do lado do quadrado para que sua área seja uma boa aproximação à área do quadrante circular?

2. Explorando aproximações para π.

   a) Aumente o arredondamento dos valores exibidos na janela do GeoGebra para 10 casas decimais clicando no ícone , seguido da opção "Configurações" 

.

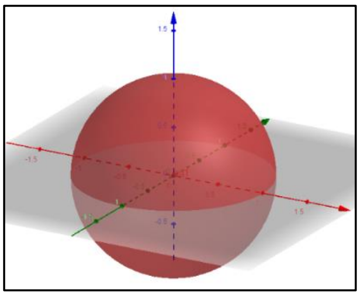
   b) Os valores encontrados anteriormente para as áreas continuam sendo uma boa aproximação? Se for, é possível achar uma melhor?

   c) Existe alguma outra estratégia para encontrar a melhor aproximação desejada? Como podemos explorá-la?

Atividade 2: Cubatura da esfera

Determine o volume da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Figura 1: Esfera



Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

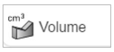
1. Construção do cenário de investigação no GeoGebra (reduzido a um octante).

a) Abra a "Janela de Visualização 3D" clicando em 

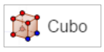
.

b) Clique no campo "Entrada" 

, digite a equação $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$ e pressione a tecla "Enter"  no teclado ou no GeoGebra.

c) Calcule o volume do octante da esfera, selecionando a ferramenta "Ângulo" , seguido de "Volume" 

e clique sobre o objeto construído anteriormente. Em seguida, dê um duplo clique sobre a caixa de texto aberta na janela de visualização e clique dentro do ícone que aparece do lado direito da equação, acrescentando a divisão por 8. Altere o outro lado da equação para "Volume do octante".

d) Construa um cubo. Para isso clique na aba "Pirâmide"  e selecione a ferramenta "Cubo" 

, posicionando dois vértices, o primeiro em (0,0) e o outro em qualquer ponto do eixo x, tal que $0 < x < 1$.

e) Calcule o volume do cubo.

f) Qual o valor da medida da aresta do cubo para que seu volume seja uma boa aproximação ao volume do octante da esfera?

2. Explorando aproximações para π.

a) Aumente o arredondamento dos valores exibidos na janela do GeoGebra para 10 casas decimais clicando no ícone , seguido da opção "Configurações" 

.

b) Os valores encontrados anteriormente para os volumes continuam sendo uma boa aproximação? Se for, é possível achar uma melhor?

c) Existe alguma outra estratégia para encontrar a melhor aproximação desejada? Como podemos explorá-la?

APÊNDICE 1 – INFORMAÇÕES SOBRE O MANUSCRITO

AGRADECIMENTOS
Aos participantes da pesquisa e à Escola Estadual Professor Octacílio Sant'anna.

FINANCIAMENTO
CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processo 428323/2018/-9, Processo 307278/2022-0, Processo 403790/2023-9).

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA
Resumo/Abstract/Resumen: Adriana de Bortoli; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.
Introdução: Adriana de Bortoli; Edwin Jun Iassanori Yassunaga, Nadya Sofia Kuriyama Sato; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.
Referencial teórico: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva; Adriana de Bortoli; Edwin Jun Iassanori Yassunaga; Nadya Sofia Kuriyama Sato.
Análise de dados: Adriana de Bortoli; Edwin Jun Iassanori Yassunaga; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.
Discussão dos resultados: Adriana de Bortoli; Edwin Jun Iassanori Yassunaga; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.
Conclusão e considerações finais: Adriana de Bortoli; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.
Referências: Adriana de Bortoli; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.
Revisão do manuscrito: Adriana de Bortoli; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.
Aprovação da versão final publicada: Adriana de Bortoli; Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.

CONFLITOS DE INTERESSE
Os autores declararam não haver nenhum conflito de interesse de ordem pessoal, comercial, acadêmico, político e financeiro referente a este manuscrito.

DISPONIBILIDADE DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados da pesquisa foi publicado no próprio artigo.

PREPRINT
Não publicado.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica

COMO CITAR - ABNT
BORTOLI, Adriana de; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; YASSUNAGA, Edwin Jun Iassanori; SATO, Nadya Sofia Kuriyama. Quadratura do círculo e cubatura da esfera com Geogebra no Ensino Médio. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 11, n. 1, *e*23104, jan./dez., 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16747

COMO CITAR - APA
Bortoli, A., Silva, R. S. R., Yassunaga, E. J. I., Sato, N. S. K. (2023). Quadratura do círculo e cubatura da esfera com Geogebra no Ensino Médio. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, *11*(1), *e*23104. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16747

POLÍTICA DE RETRATAÇÃO - CROSSMARK/CROSSREF
Check for updates
Os autores e os editores assumem a responsabilidade e o compromisso com os termos da Política de Retratação da Revista REAMEC. Esta política é registrada na Crossref com o DOI: https://doi.org/10.26571/reamec.retratacao

PUBLISHER
Universidade Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicação no Portal de Periódicos UFMT. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da referida universidade.

HISTÓRICO
Submetido: 10 de setembro de 2023.
Aprovado: 23 de novembro de 2023.
Publicado: 9 de dezembro de 2023.
