REAMEC
REVISTA DA REDE AMAZÔNICA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

UM OLHAR SOBRE A PSICOLOGIA DA APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DE TEORIAS COGNITIVAS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

A VIEW ABOUT THE PSICHOLOGY OF LEARNING MATHEMATICS IN THE CONTEXT COGNITIVE THEORIES OF ADVANCED MATHEMATICAL THINKING

UNA MIRADA A LA PSICOLOGÍA DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICAS EN EL CONTEXTO DE LAS TEORÍAS COGNITIVAS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias* João Cláudio Brandemberg**

RESUMO

Apresenta-se neste artigo uma discussão relacionada a Psicologia da Aprendizagem em Matemática, tendo em vista os apontamentos de Skemp (1987), no contexto do Pensamento Matemático Avançado. Para tanto, apresentou-se uma reflexão sobre a noção de Esquema e suas implicações na aprendizagem matemática, sobretudo, no que se refere às múltiplas associações entre conceitos, representações, interpretações, dentre outros elementos, os quais são parte constituinte do processo de construção do conhecimento matemático, fato que tem sido discutido no âmbito dos estudos associados ao Pensamento Matemático Avançado. Por isso, destacam-se alguns apontamentos relacionados à sua natureza, tendo em vista os trabalhos de Tall (1991,1992), Dreyfus (1991), Ervinck (1991) e Messias (2018), bem como às teorias sobre Imagem Conceitual e Definição Conceitual (VINNER, 1991) e APOS (DUBINSKY et al., 1988; ARNON et al, 2014). Evidenciou-se a relevância dessas perspectivas teóricas, uma vez que elas permitem visualizar o processo de apreensão de conhecimentos por parte dos estudantes mediante uma pluralidade de construções mentais, por meio das quais é possível conjecturar sobre conflitos cognitivos, bem como sobre os mecanismos e processos mentais necessários para superá-los e, consequentemente, viabilizar uma compreensão mais madura dos objetos matemáticos em estudo, tornando-os significativos à realidade e necessidades dos educandos.

Palavras-chave: Psicologia da Aprendizagem em Matemática. Pensamento Matemático Avançado. Imagem Conceitual. Definição Conceitual. Teoria APOS.

ABSTRACT

This article presents a discussion related to the Psychology of Learning in Mathematics, taking into account the notes of Skemp (1987), in the context of Advanced Mathematical Thinking. To this end, a

* Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professora Adjunta na Universidade Federal do Pará – Campus Salinópolis (UFPA), Salinópolis, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Trav.dos Apinagés, 398, apto 401, Batista Campos, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66033-170. E-mail: alice.messias@gmail.com.
** Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular na Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: brand@ufpa.br.

reflection was presented on the notion of Scheme and its implications in mathematical learning, especially regarding to the multiple associations between concepts, representations, interpretations, among other elements, which are parts of the process of constructing the mathematical knowledge, a fact that has been discussed within the scope of studies associated with Advanced Mathematical Thinking. Therefore, some notes related to its nature, considering the works of Tall (1991,1992), Dreyfus (1991), Ervinck (1991) and Messias (2018), as well as theories on Concept Image and Concept Definition (VINNER, 1991) and APOS (DUBINSKY et al., 1988; ARNON et al, 2014). The relevance of these theoretical perspectives was highlighted, since they allow us to see the process of knowledge apprehension by students through a plurality of mental constructions, through which it is possible to conjecture about cognitive conflicts, as well as about the mechanisms and processes mental skills necessary to overcome them and, consequently, enable a more mature understanding of the mathematical objects under study, making them meaningful to the reality and needs of students.

Keywords: Psychology of learning Mathematics. Advanced Mathematical Thinking. Concept Image. Concept Definition. APOS Theory.

RESUMEN

Este artículo presenta una discusión relacionada con la Psicología del Aprendizaje en Matemáticas, teniendo en cuenta los apuntes de Skemp (1987), en el contexto del Pensamiento Matemático Avanzado. Para ello, se presentó una reflexión sobre la noción de Esquema y sus implicaciones en el aprendizaje matemático, especialmente en lo que respecta a las múltiples asociaciones entre conceptos, representaciones, interpretaciones, entre otros elementos, que son parte constitutiva del proceso de construcción del sistema matemático. conocimiento, hecho que ha sido discutido en el ámbito de los estudios asociados al Pensamiento Matemático Avanzado. Se destacan, por tanto, algunas notas relacionadas con su naturaleza, teniendo en cuenta los trabajos de Tall (1991,1992), Dreyfus (1991), Ervinck (1991) y Messias (2018), así como teorías sobre Imagen Conceptual y Definición Conceptual (VINNER, 1991) y APOS (DUBINSKY et al., 1988; ARNON et al, 2014). Se destacó la relevancia de estas perspectivas teóricas, ya que permiten ver el proceso de aprehensión del conocimiento por parte de los estudiantes a través de una pluralidad de construcciones mentales, a través de las cuales es posible conjeturar sobre los conflictos cognitivos, así como sobre los mecanismos y procesos mentales. necesario superarlos y, en consecuencia, posibilitar una comprensión más madura de los objetos matemáticos objeto de estudio, haciéndolos significativos para la realidad y las necesidades de los estudiantes.

Palabras clave: Psicología del Aprendizaje en Matemáticas. Pensamiento Matemático Avanzado. Imagen Conceptual. Definición Conceptual. Teoría APOS.

1 INTRODUÇÃO

A Psicologia da Aprendizagem exerce um papel essencial no âmbito da Educação Matemática, uma vez que é por meio da compreensão de processos cognitivos que é possível refletir sobre práticas que viabilizem o entendimento de estudantes sobre conhecimentos inseridos nesse campo disciplinar. Nesse sentido, muito tem sido discutido sobre Aprendizagem Matemática sob a dimensão psicológica (SILVA; SANTOS, 2022) de seus processos e mecanismos mentais, trazendo consigo reflexões sobre desenvolvimento cognitivo e pensamento matemático, com o intuito de aprimorar a apreensão de conceitos, tornando-os mais significativos.

Tall (2013) destacou que o processo de desenvolvimento cognitivo envolve compreensões que permitem que um indivíduo pense sobre ideias essenciais associadas a um conceito, tendo a linguagem um papel facilitador, uma vez que é através dela que é possível nomear situações específicas, refinando-as sempre que possível ou quando o sujeito se torna mais matematicamente maduro. A categorização, a encapsulação e a definição são, segundo o autor, exemplos de partes constituintes desse processo, as quais, respectivamente, baseiam-se na identificação de padrões/propriedades essenciais de um conceito, na repetição de ações simbolizadas, mobilizadas como objetos mentais, e no uso da linguagem para formular ideias matemáticas.

Frente a tais percepções, Tall (2013) faz uso do termo "Estrutura de Conhecimento", a qual é constituída de múltiplas conexões que são estabelecidas na mente de um indivíduo quando diante de uma situação (matemática) específica. Nesse trabalho, essa Estrutura de Conhecimento é denominada de Esquema, o qual admite-se ser composto por uma pluralidade de percepções, ideias e ações associadas e que, por sua vez, são de extrema importância para a aprendizagem matemática, fato que reitera o quão subjetivo é esse processo. Por isso, optou-se por discutir o processo de construção de conhecimentos matemáticos sob o viés da Psicologia da Aprendizagem e, para tanto, estabeleceu-se a seguinte pergunta: Que articulações podem ser efetivadas entre teorias cognitivas no âmbito do Pensamento Matemático Avançado e a noção de Esquema no contexto da compreensão matemática?

Para respondê-la, desenvolveu-se este estudo, cujo objetivo foi articular as teorias sobre Imagem e Definição Conceitual e Teoria APOS aos pressupostos teóricos da noção de Esquema, contextualizando-as no cenário do processo de construção do pensamento matemático. Nessas condições, apresenta-se na seção 2 uma discussão sobre Esquemas e Aprendizagem Matemática. Em seguida, faz-se um estudo sobre a natureza do Pensamento Matemático Avançado e de teorias cognitivas nesse âmbito, associando-as à noção de Esquema. Nas considerações finais, apresenta-se uma síntese dos principais aspectos discutidos nesse trabalho, sobretudo, o que se refere a sua relevância para o cenário da Psicologia da Aprendizagem em Matemática.

2 ESQUEMAS E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Quando um sujeito identifica algo como exemplificação de um conceito, ele passa a reconhecê-lo sob duas perspectivas: a do próprio conceito e a deste como parte de uma classe. No âmbito da matemática, um conceito e suas representações podem ser associados a uma vasta quantidade de outros conceitos por meio de esquemas mentais, os quais são mobilizados em contextos específicos, seja para solucionar um problema ou para auxiliar na construção de novos conhecimentos.

Skemp (1987) aponta que compreender algo significa assimilá-lo na forma de um esquema apropriado, fato que explica a natureza subjetiva da aprendizagem matemática, a qual pode acontecer de forma instrumental e/ou relacional (SKEMP, 1987). A primeira diz respeito à aquisição de regras e métodos que permitem que um sujeito resolva um problema. A segunda, aos conjuntos de esquemas mentais que o possibilitam identificar determinado conhecimento, ou ainda, compreendê-lo como parte de um ou mais contextos.

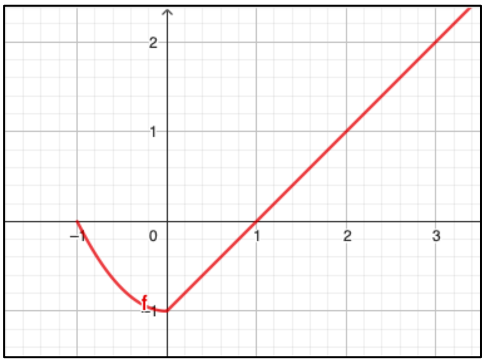
Um Esquema acerca de um conceito é composto por um conjunto de conceitos, representações visuais, mentais, processos operatórios, dentre outros elementos, os quais devem estar em acordo com sua respectiva teoria formal. Todavia, nem sempre isso acontece, isso porque interpretações e propriedades contraditórias podem ser incorporados a eles, fato que poderá conduzir um indivíduo ao erro, ou ainda, dificultar seu processo de apreensão de novos conceitos adjacentes (VINNER, 1991; SKEMP, 1987; 1993; TALL, 2013; MESSIAS, 2018).

Para fins de exemplificação acerca de como esquemas mentais podem ser evocados diante de uma situação matemática específica, considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, -1 \leq x \leq 0 \\ x - 1, x > 0 \end{cases}$. Imagine que um indivíduo precise verificar se f é contínua em $x = -1$ e $x = 0$. Para tanto, duas perspectivas distintas podem ser consideradas: a algébrica e a geométrica.

No que se refere ao contexto algébrico, o sujeito poderá observar, por exemplo, que $D_f = [-1, +\infty)$. Nessas condições, evidenciar que $x = -1$ é um ponto localizado na extremidade do intervalo e, nessas condições, considerar o limite lateral à direita desse ponto, de modo que, para que a função seja contínua em $x = -1$, $f(-1)$ deve ser igual à $\lim_{x \to -1^+} f(x)$, o que, de fato, acontece. Em relação a $x = 0$, o sujeito deve observar que este é um ponto localizado no meio do intervalo de validade da função e, por isso, deve mobilizar o objeto Limite Bilateral, de modo que para a função ser contínua em $x = 0$, $f(0)$ deve ser igual à $\lim_{x \to 0} f(x)$. E, nesse caso, como $f(0) = -1$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$, conclui-se que a função é contínua em $x = 0$.

No que se refere ao contexto geométrico, um indivíduo pode, a partir da interpretação da representação gráfica da função, solucionar o que fora solicitado. Nessas condições, faz-se necessária a visualização do gráfico de f (figura 1).

Figura 1 – Gráfico de $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, -1 \leq x \leq 0 \\ x - 1, x > 0 \end{cases}$.

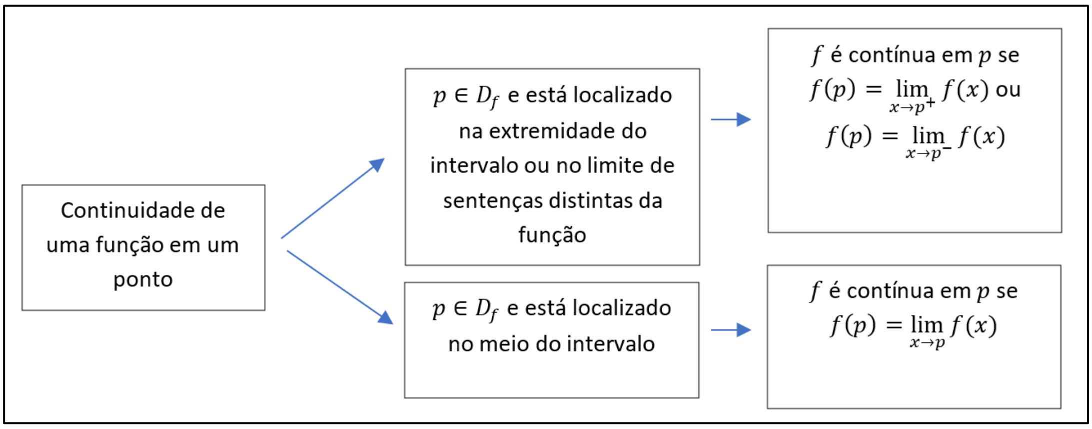


Fonte: Elaborado pelos autores.

Ainda que sob uma perspectiva diferente da anterior, é possível observar que $x = -1$ se configura como um ponto localizado na extremidade inferior do intervalo de validade dessa função, fato que deve ser considerado para definir se esta é, ou não, contínua nesse ponto. De maneira semelhante a discussão anterior, o indivíduo deve perceber que a função é definida em $x = 0$, bem como que $f(0) = -1$ e que $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ e, por isso, afirmar a continuidade em $x = 0$.

Observa-se que as sugestões de resolução nos contextos algébrico e geométrico são coerentes e estão em acordo com aspectos relativos ao conceito de continuidade de uma função no ponto. Nessas condições, pode-se conjecturar sobre elementos que, nas condições do que fora solicitado, precisam ser mobilizados por um sujeito e, por isso, devem compor esquemas mentais acerca desse conceito (ver figura 2).

Figura 2 - Esquema para continuidade de uma função no ponto



Fonte: Elaborado pelos autores.

Observa-se que, ao solucionar uma atividade como a que foi exemplificada e discutida, um indivíduo precisa mobilizar não somente elementos relacionados à natureza do conceito de continuidade, mas também, interpretá-los a partir da conexão com outros esquemas mentais, como é o caso da necessidade de evocar aspectos vinculados à existência dos limites laterais e bilateral. Ressalta-se, nesse sentido, que quanto maior e mais sólidas forem as conexões entre os esquemas mentais de um sujeito, mais ampla será sua compreensão acerca de um conhecimento matemático, fato que reitera, conforme Skemp (1987), a função integrativa de um esquema em nosso sistema cognitivo.

É importante destacar, no entanto, que elementos incoerentes, pautados em interpretações incompletas, contraditórias, ou ainda, completamente equivocadas sobre um conceito, podem compor um (ou mais) esquemas mentais de um sujeito, conduzindo-o – a depender do contexto em que esteja inserido – ao erro, além de prejudicar a apreensão de quaisquer outros conhecimentos matemáticos adjacentes a esse conceito.

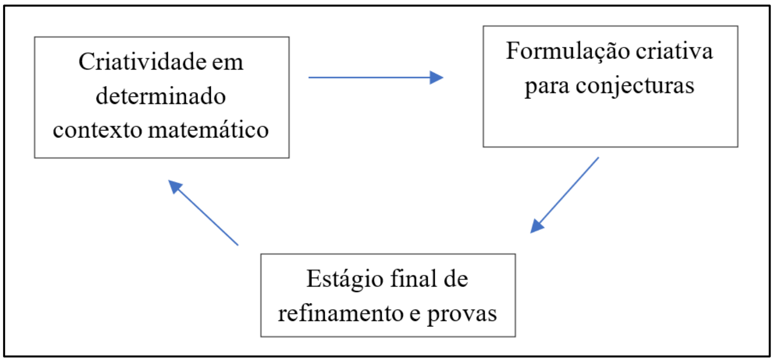
Como exemplo, imagine que um aluno generalize que a continuidade de uma função no ponto dependa da existência do limite bilateral em torno desse ponto. Nessas condições, ele responderia, considerando a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, -1 \leq x \leq 0 \\ x - 1, x > 0 \end{cases}$, que f não seria contínua em $x = -1$, já que $\lim_{x \to -1} f(x)$ não existe. Ou ainda, se um sujeito atribuísse à continuidade de uma função a ideia de conectividade restrita a funções escritas em uma única sentença, conforme observado em trabalhos como de Vinner (1987), Amatangelo (2013), Messias (2018), dentre outros, esse sujeito imediatamente responderia que a função não seria contínua nos pontos indicados, uma vez que em suas interpretações, funções escritas em partes implicariam, necessariamente, em saltos e/ou buracos que não estariam em acordo com sua percepção sobre continuidade. Em situações como essa, torna-se necessário ampliar as compreensões dos estudantes, para fins de auxiliá-los não somente a resolver uma tarefa, mas principalmente, a alcançar um entendimento efetivo acerca da noção de continuidade de uma função em um ponto.

Frente a esse cenário, concorda-se com Skemp (1987), no que se refere à natureza dinâmica dos esquemas conceituais frente ao desenvolvimento do pensamento matemático, os quais podem ser reestruturados para fins de ampliar a compreensão de sujeitos acerca da pluralidade de ideias, conceitos, representações, interpretações, dentre outros elementos que os constituem. Nessas condições, observa-se a aproximação entre os estudos de Skemp (1987), acerca da Psicologia da Aprendizagem em Matemática, e o Pensamento Matemático Avançado, conforme discutido na seção subsequente.

3 PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

A natureza do PMA, na perspectiva de Tall (1991) está atrelada a matemática formal e a um ciclo de atividades, as quais podem ser representadas no diagrama a seguir:

Figura 3 - Ciclo de atividades e a natureza do PMA.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Para Tall (1991), esse ciclo de atividades não acontece da mesma maneira para todos os indivíduos, uma vez que existem uma pluralidade de modos de pensar sobre matemática, culturalmente desenvolvidos, e que trazem consigo a matemática tanto como atividade mental quanto como sistema formal.

https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16354 2318-6674

Essa pluralidade de modos de pensar, segundo Dreyfus (1991), está atrelada aos diferentes processos mentais intrínsecos ao pensamento matemático, os quais interagem entre si quando um indivíduo é colocado diante de uma situação de aprendizagem específica. O processo de representação, por exemplo, é de extrema relevância para a aprendizagem matemática, uma vez que é a partir da formulação de múltiplas representações de um objeto que é possível atribuir flexibilidade à compreensão matemática. Essa flexibilidade, para Dreyfus (1991), é fundamental, já que não basta formular diferentes representações, é preciso saber utilizá-las de forma flexível, ou seja, saber o momento de trocar de uma representação para outra, com o intuito de solucionar um problema ou mesmo construir novos conhecimentos.

A tradução e a modelagem estão intimamente relacionadas com a representação. Enquanto a primeira se faz relevante no PMA com o intuito de transitar de uma formulação matemática para outra, atribuindo-lhe significado. A segunda, possibilita a construção matemática mediante características essenciais de um objeto, sistema ou processo a ser descrito (DREYFUS, 1991).

Outros dois processos, além da representação, apresentam-se como pré-requisitos para a abstração: a generalização e a sintetização. Generalizar significa identificar padrões a partir de particularidades de um conhecimento matemático específico, ampliando seus domínios de validades. Sintetizar significa combinar ou compor partes, tais que se constituam uma totalidade (MESSIAS, 2018). A abstração acontece quando o indivíduo constrói estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas. Para tanto, é necessário expandir o olhar sobre os objetos em estudo, suas propriedades e possíveis relações com outros contextos.

Ervinck (1991) destaca a importância da criatividade como parte constituinte da natureza do PMA, tendo em vista sua contribuição para o desenvolvimento da teoria formal mediante a construção de conjecturas a partir de experiências oriundas de diferentes contextos matemáticos, bem como na formulação matemática como um sistema formal e dedutivo de ideias claramente definidas. Para o autor, a criatividade matemática se faz presente quando um indivíduo consegue, dentre outras habilidades, formular definições a partir de conceitos que garantam tanto sua utilidade quando a de outros objetos matemáticos, ou quando ele capaz de escolher palavras ou símbolos apropriados para representar um conceito (MESSIAS, 2018).

É possível observar os elementos que constituem a natureza do Pensamento Matemático Avançado em meio a diferentes teorias cognitivas, dentre elas, a Teoria sobre Imagem e Definição Conceitual (VINNER, 1991) e a Teoria APOS (DUBINSKY et al, 1985; ARNOON, et al., 2014), apresentadas nas subseções a seguir.

https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16354 2318-6674

3.1 Teoria sobre imagem e definição conceitual

Vinner (1991) aponta que, quando diante de determinada situação matemática sobre um conceito, um indivíduo recorre a uma pluralidade de processos a ele associados. Nessas condições, sua compreensão depende de sua habilidade em estabelecer conexões entre os mais variados conceitos matemáticos e, principalmente, do quanto sua memória é estimulada a formar associações não verbais, isto é, imagens conceituais para um conceito, baseado em representações visuais, figuras mentais, impressões, propriedades, experiências anteriores de aprendizagem, dentre outros elementos, fato que aproxima a noção de Imagem Conceitual (IC) à estrutura de Esquema de Skemp (1987), descrita na seção anterior.

Nesse sentido, admite-se que o entendimento de um indivíduo sobre um conceito não se restringe à mera mobilização de sua linguagem simbólica, ou ainda, da reprodução de sua definição formal. Para Vinner (1991), entender um conceito significa formar uma Imagem Conceitual coerente para ele. Isso porque, interpretações equivocadas e contraditórias de um conceito, se precipitadamente generalizadas, podem ser incorporadas à sua Imagem Conceitual, de modo que esta, quando evocada, poderá dificultar seu desempenho na solução de problemas ou na aprendizagem de outros conceitos. Por isso, diz-se que as imagens conceituais sobre um conceito precisam estar em acordo com a teoria formal.

É importante ressaltar que, quando um sujeito é colocado diante de uma situação matemática, várias partes de sua Imagem Conceitual podem ser ativadas para auxiliá-lo a solucioná-la e/ou interpretá-la. A porção da Imagem Conceitual que é ativada para fins de resolver e/ou interpretar determinada tarefa é denominada de Imagem Conceitual Evocada (ICE) (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991; MESSIAS, 2013; 2018). A ICE não representa, necessariamente, tudo o que um indivíduo sabe acerca de uma ideia matemática, uma vez que este pode mobilizar uma pluralidade de outros elementos a ela adjacentes, em contextos distintos e, conforme ache necessário.

A Imagem Conceitual de um sujeito pode (e deve) ser traduzida na forma de Definição Conceitual Pessoal (DCP) que, por sua vez, é a forma em palavras utilizada para descrever um conceito. Trata-se de uma fraseologia própria ao indivíduo que, por sua vez, traz consigo elementos característicos de sua interpretação sobre esse conceito. A DCP pode diferir da Definição Conceitual Formal, que é aquela admitida pela comunidade científica, fato que pode, ou não, significar que sua DCP seja inconsistente.

Destaca-se, ainda, que interpretações e propriedades incoerentes ou contraditórias podem compor a Imagem Conceitual de um indivíduo e, enquanto elas não forem simultaneamente evocadas, continuarão coexistindo. Tal fato, leva-nos a observar a importância de estimular que os sujeitos façam uso do máximo de representações mentais, interpretações, propriedades, dentre outros elementos, enquanto refletem sobre uma determinada situação matemática, uma vez que seja possível, a partir de suas evocações, identificar possíveis conflitos relacionados à sua interpretação sobre a natureza de uma ideia matemática.

Para viabilizar a compreensão do leitor acerca do conceito de Imagem Conceitual Evocada, considere a equação dada por $y'' + y' - 2y = 8senx$. Para escrever sua solução geral, faz-se necessária uma série de evocações que, por sua vez, nortearão seu processo de solução. Obviamente, que os elementos mobilizados para a solucionar podem variar de um sujeito para outro, afinal, há uma pluralidade de modos de pensar e fazer matemática, ainda assim, certos processos precisam constituir a ICE de um estudante, dentre eles, os destacados a seguir.

[ICE 1] – Identifica-se que se trata de uma **Equação Diferencial linear de 2ª ordem não homogênea.**

[ICE 2] – Mobiliza-se que a estrutura de sua solução geral é dada por: $y = y_h + y_p$, em que y_h é a solução de sua homogênea associada e y_p é a solução da particular.

[ICE3] – Evoca-se o método de coeficientes a determinar para solucionar a equação. Nessas condições:

[ICE 3.1] – Resolve-se a equação de sua homogênea associada. Para tanto, considera-se $y'' + y' - 2y$ =0.

[ICE 3.2] – Deve-se escrevê-la como uma equação quadrática, ou seja, de $r^2 + r - 2 = 0$. Resolvendo-a, observa-se que as raízes da equação são $r = 1$ e $r = -2$.

[ICE 3.3] – Escreve-se a solução da homogênea, a qual é dada por $y_h = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

[ICE4] – Estrutura-se, a partir da mobilização do método de coeficientes a determinar, a solução da particular, como $y = Asenx + Bcosx$. E, em seguida, obtêm-se y' e y'', de modo que, $y' = Acosx - Bsenx$ e $y'' = -Asenx - Bcosx$.

[ICE 5] – Substitui-se y, y' e y'' na equação original, donde obtém-se:

$$-Asenx - Bcosx + Acosx - Bsenx - 2(Asenx + Bcosx) = 8senx$$

$$-Asenx - Bcosx + Acosx - Bsenx - 2Asenx - 2Bcosx = 8senx$$

$$-3Asenx - Bsenx + Acosx - 3Bcosx = 8senx$$

$$(-3A - B)senx + (A - 3B)cosx = 8senx$$

$$-3A - B = 8$$

$$A - 3B = 0$$

Logo, $A = -12/5$ e $B = -4/5$

Portanto, $y_p = (-12/5)senx - (4/5)cosx$

[ICE6] – Escreve-se a solução geral da equação, a qual é dada por: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - (12/5)senx - (4/5)cosx$

Ainda que se compreenda que existem diferentes modos de pensar e fazer em matemática, pode-se prever estruturas mentais que sejam necessárias para aprender um novo conceito ou solucionar uma tarefa. No caso da equação descrita, fez-se necessário evocar a natureza da equação diferencial, sua estrutura de solução, o método de resolução mais adequado, a estrutura de uma solução de EDO linear de segunda ordem homogênea, a derivada de funções trigonométricas, dentre outros aspectos que foram essenciais para a escrita de uma solução adequada.

No entanto, torna-se importante ressaltar que se um estudante for submetido constantemente a situações matemática semelhantes a equação diferencial previamente descrita, ele irá generalizar essa estrutura de solução e evocá-la, sempre que estiver diante de uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea. Todavia, quando diante de uma equação de mesma natureza que requeira outra estratégia de resolução, ele não conseguirá solucioná-la. Por isso, a importância de possibilitar que o estudante, a partir de suas experiências de aprendizagem, desenvolva o máximo de elementos associados a um objeto matemático, inclusive estratégias para solucionar tarefas, incorporando-as à suas estruturas cognitivas. Tal fato, pode ser exemplificado por meio da equação $y'' + y = secx$.

Uma vez identificado que a referida equação se trata de uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea, o sujeito deverá mobilizar sua estratégia de resolução que, nesse caso, deverá ser pautada no método de variação de parâmetros (Esse é um momento, por exemplo, que diante de uma limitação matemática, caso o aluno saiba fazer uso somente do método de variação de parâmetros, o professor poderá introduzir uma nova estratégia de resolução que poderá ser incorporada à Imagem Conceitual do aluno e a partir daí, ser evocada sempre que necessário). Vejamos uma estrutura de resolução, constituída de possíveis Imagens Conceituais a serem evocadas:

https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16354 2318-6674

[ICE 1] – Evocar os elementos que constituem o método de variação de parâmetros para solucionar a equação e a estrutura da solução da equação, a qual também é da forma $y = y_h + y_p$.

[ICE 2] – Encontra-se y_h, a qual é obtida a partir da solução da equação característica de sua parte homogênea. Nessas condições, resolve-se $r^2 + r = 0$, de modo que as raízes obtidas são: $r = \pm i$. Por isso, $y_h = e^{0.x}(C_1 senx + C_2 cosx)$, isto é, $y_h = C_1 senx + C_2 cosx$.

[ICE 3] – Encontra-se $y_p = y_1 u_1 + \ y_2 u_2$, tal que $y_1 = senx,\ \ y_2 = cosx$, $u_1 = -\int \frac{y_2 h(x)}{W} dx$ e $u_2 = \int \frac{y_1 h(x)}{W} dx$, em que $h(x) = secx$ e W é o Wronskiano. Sendo assim:

$$W = \begin{vmatrix} senx & cosx \\ cosx & -senx \end{vmatrix} = -1$$

$$u_1 = -\int \frac{cosxsecx}{-1} dx = x \ \text{ e } u_2 = \int \frac{senxsecx}{-1} dx = lncosx$$

$$\text{Portanto, } y_p = xsenx + cosxlncosx$$

[ICE4] – Escreve-se a solução geral da equação, a qual é dada por $y = C_1 senx + C_2 cosx + xsenx + cosxlncosx$

A partir das EDOs exemplificadas, admite-se que, de fato, é de extrema relevância que os estudantes desenvolvam a habilidade de estabelecer o máximo de conexões possível entre seus esquemas mentais, os quais são constituídos por múltiplas Imagens Conceituais associadas a processos e mecanismos mentais que auxiliam, de maneira dinâmica, no amadurecimento e construção do pensamento matemático de um indivíduo. É nesse cenário que pode ser inserida a Teoria APOS[1], a qual também encontra-se inserida no âmbito das teorias cognitivas do Pensamento Matemático Avançado (PMA).

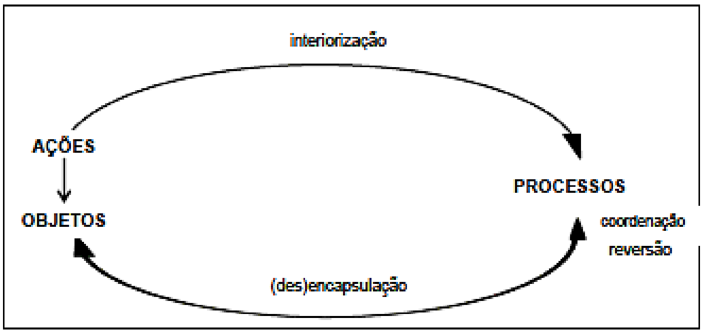
3.2 Teoria APOS

A teoria APOS traz consigo a contextualização de mecanismos mentais, tais como a interiorização, encapsulação, coordenação para o âmbito do PMA, com o intuito de possibilitar que um sujeito construa, por meio desses mecanismos, estruturas mentais associadas a um

[1] A sigla APOS significa Action, Process, Object e Schema (Ações, Processos, Objetos e Esquema).

conceito. Entende-se, portanto, que um conceito seja concebido por meio de Esquemas que, em acordo com a teoria, apresenta a seguinte estrutura:

Figura 4 - Composição de um Esquema



Fonte: Arnon et al. (2014, p. 10, traduzido pelos autores).

Admite-se, nesse sentido, que é primeiramente mediante a manipulação de objetos físicos ou mentais previamente construídos que se forma Ações. Quando se tem controle sobre essas Ações, estas são interiorizadas na forma de um Processo. Isso quer dizer que se tem consciência sobre elas, fato que permite combiná-las entre si e, inclusive, entre outras Ações. Dubinsky et al. (2005) destaca que:

> À medida que se repete e reflete sobre uma Ação, esta pode ser interiorizada como um processo mental. Um processo é uma estrutura que performa a mesma operação interiorizada, mas completamente na mente de um indivíduo, possibilitando-o imaginar tal transformação sem executá-la explicitamente (DUBINSKY et al., 2005, p. 339, traduzido pelos autores).

A Encapsulação acontece quando um sujeito entende o Processo como uma estrutura estática e, desse momento em diante, executa Ações sobre tal estrutura que, por sua vez, passa a ter o status de Objeto. É possível que múltiplos processos mentais se façam presente nessa construção. Um ou mais objetos podem ser desencapsulados e seus respectivos Processos, Coordenados para formar um novo Objeto.

Uma Esquema mental sobre um conceito é dinâmico e sua coerência é determinada pela habilidade de um sujeito em entender em que contexto(s) matemático(s) deve utilizá-los. É um conjunto de Ações, Processos, Objetos e, inclusive, de outros Esquemas (MESSIAS; BRANDEMBERG, 2021). Sua natureza pode diferir de um indivíduo para outro, isso porque existe uma pluralidade de modos de pensar e fazer matemática (DUBINSKY, 1991; ARNOON et al, 2014; MESSIAS, 2018). Ainda assim, um Esquema se apresenta como uma importante ferramenta, uma vez que seja possível conjeturar, tendo em vista sua estrutura, sobre os possíveis mecanismos e processos mentais necessários para a compreensão de um dado objeto matemático. A este tipo de modelo hipotético dá-se o nome de Decomposição Genética (DG).

Uma Decomposição Genética se apresenta como uma hipótese sobre os tipos de transformações que precisam ser realizadas para que um sujeito construa determinado conhecimento matemático. Traz consigo, nesse sentido, Ações, Processos, Objetos e Esquemas que, ao serem associados entre si, possibilitam trilhar por caminhos cognitivos que levam à apreensão de novos conceitos (MESSIAS, 2018).

Apesar de entender que diferentes indivíduos aprendem de formas distintas, uma Decomposição Genética pode servir de base para a construção de conhecimentos, uma vez que é possível refiná-la, para fins de adaptá-la a diferentes realidades matemáticas. Elas podem ser utilizadas como instrumentos diagnósticos, quando se pretende observar/classificar as estruturas mentais desenvolvidas por um sujeito acerca de um conceito, ou ainda, nortear a elaboração de instruções de ensino, cujos elementos estejam organizados conforme as indicações desse aporte teórico.

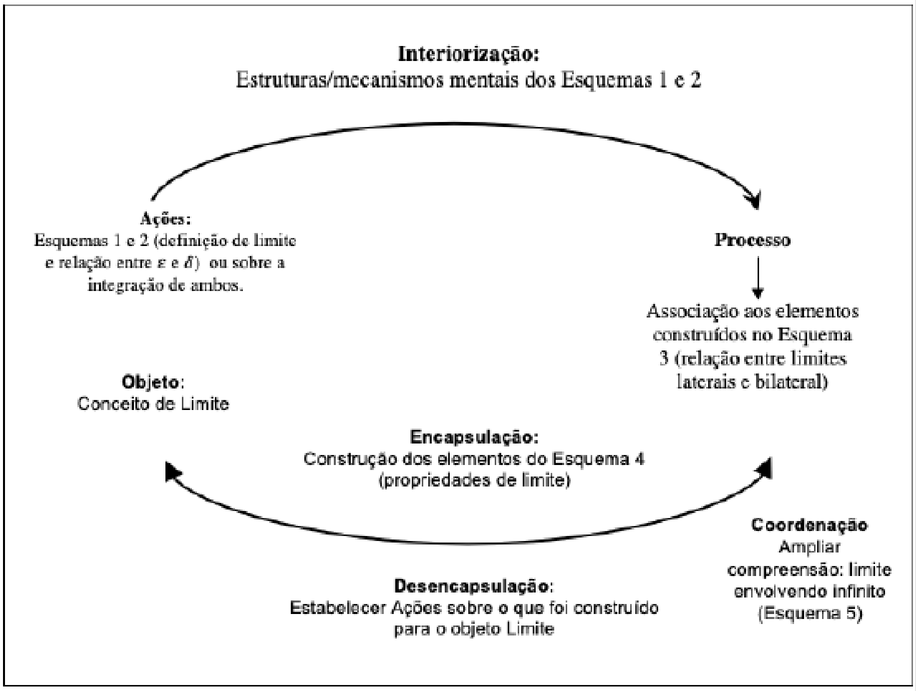
Em Messias e Brandemberg (2021), os autores desse artigo apresentaram uma decomposição genética para o objeto Limite de uma Função[2], a qual foi constituída de cinco esquemas integrados, a saber:

- Esquema 1: Definição de Limite de uma Função;
- Esquema 2: A relação entre ε e δ;
- Esquema 3: Relação entre os limites laterais e bilateral;
- Esquema 4: Propriedades de limites;
- Esquema 5: Limites envolvendo infinito.

A Decomposição Genética para o Objeto Limite de Função foi estruturada, conforme o Esquema destacado na figura 5 (a seguir).

[2] Para maiores detalhes acerca de cada um dos Esquemas, sugiro a leitura de Messias (2018) e Messias e Brandemberg (2021).

Figura 5 – Decomposição Genética para o Objeto Limite de Função



Fonte: Messias e Brandemberg (2021, p. 135)

No que se refere às Ações sobre a Definição de Limite e a Relação entre ε e δ, entende-se ser necessário que os indivíduos compreendam a definição de limite como sendo constituída de processos associados ao comportamento de uma função em torno de $(x_0, f(x_0))$, exceto talvez nesse ponto. Tal prática está intimamente atrelado a relação que pode ser estabelecida entre os elementos pertencentes ao intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ e $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

A interiorização envolve, tanto sob a perspectiva geométrica quanto algébrica, a apreensão da relação entre ε e δ, bem como da construção da definição formal de limite a partir dessa relação e de demais elementos a ela associada, como por exemplo, as noções de Domínio, Intervalo, os quantificadores "para todo" e "existe", dentre outros. A partir daí, entende-se que seja possível que esse Processo permita que os estudantes ampliem suas compreensões, de modo que eles possam refletir acerca da (in)existência do limite bilateral, bem como de sua relação com os limites laterais.

A Encapsulação pode acontecer mediante o estudo das propriedades relativas ao objeto Limite de uma Função, cujo conceito deve assumir o status de Objeto. Na Desencapsulação, realizam-se Ações sobre tal objeto, de maneira que um novo Processo seja coordenado e, a partir dele, os estudantes ampliem seu Esquema, incorporando a ele aspectos concernentes aos limites envolvendo o infinito.

https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16354 2318-6674

Ressalta-se que uma DG, enquanto modelo de epistemologia e cognição matemática, pode ser construída a partir de experiências docentes, de apontamentos da literatura sobre a compreensão de estudantes acerca do objeto em estudo, do aprofundamento teórico no que se refere à Teoria APOS. É possível serem incluídos, também, aspectos concernentes ao desenvolvimento histórico das ideias matemáticas incorporadas na Decomposição Genética.

Reitera-se, nesse sentido, a relevância de traçar reflexões e conjecturas acerca de elementos que precisam estar atrelados à apreensão de determinado conceito, tendo em vista uma aprendizagem efetiva, associada a uma pluralidade de contextos matemáticos. Isso porque, a natureza dinâmica do pensamento matemático demanda um processo de construção associado a múltiplos objetos, interpretações, operações, propriedades, dentre outros aspectos, os quais necessitam estar em acordo com os pressupostos teórico-práticos da matemática.

Frente a esse cenário, concorda-se com Skemp (1987), no que se refere à natureza dinâmica e função integrativa dos esquemas conceituais frente ao desenvolvimento do pensamento matemático, os quais podem ser reestruturados para fins de ampliar a compreensão de sujeitos acerca da pluralidade de ideias, conceitos, representações, interpretações, dentre outros elementos que os constituem. Nessas condições, observa-se a aproximação entre os estudos de Skemp (1987), acerca da Psicologia da Aprendizagem em Matemática, e as teorias cognitivas no âmbito do Pensamento Matemático Avançado, discutidas no decorrer desse texto.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se, nesse texto, uma reflexão acerca da Psicologia da Aprendizagem em Matemática à luz dos estudos de Skemp (1987). Nesse sentido, observou-se o papel essencial dos Esquemas, enquanto estruturas mentais constituídas de elementos que corroboram para uma aprendizagem mais ampla com vistas ao amadurecimento matemático de um indivíduo.

Nessas condições, as considerações de Skemp (1987) foram associadas a teorias cognitivas no âmbito do Pensamento Matemático Avançado, com a pretensão de destacar o quanto os conhecimentos matemáticos encontram-se conectados, tendo em vista a pluralidade de componentes dos Esquemas Mentais que um indivíduo pode construir e fazer uso, tanto no processo de aquisição de novos conceitos quanto para solucionar situações matemáticas específicas, conforme descrito no decorrer desse texto.

Ressalta-se, desse modo, a relevância das discussões aqui discorridas para o cenário da aprendizagem matemática, sobretudo, no que tange às noções de Imagem Conceitual e

Definição Conceitual (Vinner, 1991; MESSIAS, 2013; 2018) e Teoria APOS (DUBINSKY et al., 1984; ARNON et al., 2014) atreladas aos estudos sobre Esquemas (SKEMP, 1987). Isso porque, é possível conjecturar, a partir desses elementos, tanto sobre possíveis conflitos cognitivos associados ao processo de construção de um conceito por parte de um indivíduo, quanto das possíveis estruturas mentais necessárias para superá-los. Entende-se, nesse sentido, que a formação de novos conhecimentos não se impõe automaticamente ou imediatamente, mas por conflitos com aqueles que já existem, fato que reforça a importância de avaliá-los sob um viés psicológico, atrelado à natureza, características e limitações do Pensamento Matemático dos indivíduos.

Finalmente, reitera-se a relevância desse trabalho, uma vez que se considere, por meio das discussões apresentadas, ser possível integrar os pressupostos dos quadros teóricos destacados ao contexto de sala de aula de diferentes segmentos de ensino, de maneira a promover uma aprendizagem mais ampla e, sobretudo, possibilitar que os estudantes formem uma compreensão madura acerca dos objetos matemáticos em estudo, tornando-os significativos à sua realidade e necessidades.

REFERÊNCIAS

AMATANGELO, Miriam Lynne. Student understanding of limit and continuity at a point: a look at four potentially problematic conceptions. 2013. 112f. Dissertação (Mestrado em Artes), Bringham Young University (Utah/USA), 2013.

ARNON et al. APOS Theory – a framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer, 2014.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordretch: Kluwer publications, p. 25-41.1991.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed). **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 95 – 123.

DUBINSKY, Ed; WELLER, K.; MCDONALD, M.A.; BROWN, A. Some historical issues and paradozes regarding the concept of infinity: An APOS analysis. **Educational Studies in Mathematics,** n. 58, p. 335-359.

ERVYNCK, G. Mathematical creativity. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordretch: Kluwer publications, p. 42 - 53.1991.

MESSIAS, M. A. V. F. **Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função** 2013. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MESSIAS, M. A. V. F. **Teorias Cognitivas do Pensamento Matemático Avançado e o processo de construção do conhecimento: um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade**. 2018. 186f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas), Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, UFPA, 2018.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio; BRANDEMBERG, João Cláudio. Uma decomposição genética para o objeto matemático limite de uma função. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 17, n. 38, p. 121-138, maio 2021. ISSN 2317-5125. http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v17i38.9657

SILVA, F. H. S. da; SANTOS, R. A. dos. Conexão dos conteúdos matemáticos ensinados na escola: fundamentação em Piaget, Ausubel e Vergnaud**. REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 10, n. 3, p. e22067, 2022. https://doi.org/10.26571/reamec.v10i3.14237

SKEMP, R.R. The Psychology of learning mathematics. New Jersey: Routledge Taylor & Francis Group, 1987.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer publications, p. 3-21, 1991.

TALL, D. How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, 1981, p. 151 – 169

VINNER, S. Continuous functions and reasoning in college students. In Bergeron, J. (ED) Proceedings of the international conference on the psychology of mathematics education (PME), 1987, vol. 1, pp. 177 – 183.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer publications, p. 65-81, 1991.

APÊNDICE 1 – INFORMAÇÕES SOBRE O MANUSCRITO

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA
Resumo/Abstract/Resumen: Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg
Introdução: Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg
Referencial teórico: Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg
Análise de dados: Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg

Discussão dos resultados: Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg
Conclusão e considerações finais: Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg
Referências: Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg
Revisão do manuscrito: Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg
Aprovação da versão final publicada: Alice de Vasconcelos Feio Messias e João Cláudio Brandemberg

CONFLITOS DE INTERESSE
Os autores declararam não haver nenhum conflito de interesse de ordem pessoal, comercial, acadêmico, político e financeiro referente a este manuscrito.

DISPONIBILIDADE DE DADOS DE PESQUISA
Não se aplica.

PREPRINT
Não publicado.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

COMO CITAR - ABNT
MESSIAS, Alice de Vasconcelos Feio; BRANDEMBERG, João Cláudio. Um olhar sobre a psicologia da aprendizagem em matemática no contexto de teorias cognitivas do pensamento matemático avançado. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 11, n. 1, *e*23091, jan./dez., 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16354

COMO CITAR - APA
Messias, A. V. F. & Brandemberg, J. C. (2023). Um olhar sobre a psicologia da aprendizagem em matemática no contexto de teorias cognitivas do pensamento matemático avançado. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, *11*(1), *e*23091. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16354

POLÍTICA DE RETRATAÇÃO - CROSSMARK/CROSSREF
Os autores e os editores assumem a responsabilidade e o compromisso com os termos da Política de Retratação da Revista REAMEC. Esta política é registrada na Crossref com o DOI: https://doi.org/10.26571/reamec.retratacao

PUBLISHER
Universidade Federal de Mato Grosso. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Publicação no Portal de

EDITOR
Dailson Evangelista Costa

AVALIADORES
Rudinei Alves dos Santos
Avaliador 2: Não autorizou a divulgação do seu nome.

HISTÓRICO
Submetido: 28 de setembro de 2023.
Aprovado: 08 de novembro de 2023.
Publicado: 27 de novembro de 2023.