



## Simulação de erros na medição de altura de árvores inclinadas com aparelhos baseados em princípios trigonométricos

Gilson Fernandes da SILVA<sup>1\*</sup>, Rômulo MÔRA<sup>2</sup>, Rafaella de Angeli CURTO<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ciências Florestais e da Madeira, Centro de Ciências Agrárias, Universidade Federal do Espírito Santo, Jerônimo Monteiro, Espírito Santo, Brasil.

<sup>2</sup> Faculdade de Engenharia Florestal, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, Mato Grosso, Brasil.

<sup>3</sup> Instituto de Ciências Agrárias e Ambientais, Universidade Federal de Mato Grosso, Sinop, Mato Grosso, Brasil.

\*E-mail: romulomef@yahoo.com.br

Recebido em outubro/2016; Aceito em junho/2017.

**RESUMO:** Neste trabalho objetivou-se verificar o erro cometido ao simular a medição de altura de árvores com inclinação do tronco empregando-se hipsômetros baseados em princípios trigonométricos. Para efeito desse estudo, foram consideradas as situações em que a árvore está localizada em terreno plano ou inclinado, e as situações em que a inclinação da árvore medida está no mesmo sentido do mensurador ou em sentido oposto. Tendo em vista as situações definidas, foi então desenvolvido um modelo matemático de simulação de erro de medição para cada uma delas. Nesse modelo, foram consideradas como variáveis que podem influenciar o erro: o ângulo de inclinação da árvore em relação ao terreno, a altura da árvore inclinada e a distância reduzida da árvore em relação ao mensurador. Verificou-se, ao final do trabalho, que terrenos com declive favorecem a ocorrência de erros. Por outro lado, o aumento da distância do observador à árvore promove a diminuição desses erros. Em relação à altura das árvores, foram encontrados erros maiores para árvores maiores. Finalmente, quando se considerou a inclinação da árvore, verificou-se que as árvores inclinadas no sentido do mensurador são mais difíceis de serem visualizadas, promovendo, portanto, erros de medições maiores.

**Palavras-chave:** dendrometria, hipsometria, ângulos.

### Simulation of errors in the measurement of height of inclined trees with hypsometers based on trigonometric principles

**ABSTRACT:** This work aimed to verify the error committed when simulating the height measurement of inclined trees employing hypsometers based on trigonometric principles. In this study, the following situations were considered: the tree is located in plane or sloping terrain; and the situations in which the slope is in the same direction of the observer or in opposite direction. A simulation mathematical model of measurement errors was considered for each one of these situations. In this model, tree inclination angle in relation to the terrain, height of the inclined tree and reduced distance between the tree and observer were considered as variables that which can influence the errors. It was verified, at the end of the study, that sloping terrains favor the error occurrence. On the other hand, the increase of the distance between the observer and the tree promotes the decrease of these errors. In relation to tree height, larger errors were found for the tallest trees. Finally, when tree inclination was considered, it was verified that the trees inclined towards the observer are more difficult to be visualized, promoting, therefore, larger measurements errors.

**Keywords:** dendrometer, hypsometer, angles.

## 1. INTRODUÇÃO

Juntamente com o diâmetro, a altura é uma das variáveis dendrométricas mais importantes, pois a partir dela pode-se obter informações sobre a área basal, o volume, a biomassa, além de possibilitar estudar a estrutura vertical e analisar a qualidade de sítio (SCHNEIDER; SCHNEIDER, 2008).

Para medir a altura das árvores em pé, utilizamos comumente os hipsômetros. Esses aparelhos podem ser construídos sobre

dois princípios: geométrico ou trigonométrico. Os instrumentos baseados em princípios geométricos utilizam relações existentes entre triângulos semelhantes. Já o princípio trigonométrico utiliza a determinação de ângulos formados entre a base e o topo da árvore e o nível do instrumento (MACHADO; FIGUEIREDO FILHO, 2009; GONÇALVES et al., 2009).

Em florestas nativas, além de ser útil na estimação do volume e biomassa, a altura total das árvores pode apresentar significado ecológico bem como orientar algumas ações de

manejo. De acordo com Souza; Souza (2004), o conhecimento das alturas das árvores ajuda a compreender a estrutura vertical da comunidade, podendo-se estimar por meio desta variável as espécies que apresentam maior importância ecológica considerando-se este tipo de estrutura.

Em florestas plantadas, a medição da altura é muito importante para o cálculo dos volumes totais e parciais produzidos. Além disso, segundo Soares et al. (2011), a altura, em conjunto com a informação da idade do indivíduo, torna-se uma variável importante para a determinação da qualidade de um local para produção de madeira. Silva et al. (2007) destacam a importância da medição da altura nesse tipo de floresta, avaliando o uso de modelos hipsométricos para tornar este processo mais rápido e confiável.

Na realização de levantamentos florestais podem ser cometidos erros amostrais e não amostrais. Os primeiros estão diretamente relacionados com o método e processo de amostragem utilizados na seleção de árvores, seja para as equações de volume ou relações hipsométricas, estando consequentemente relacionados ao tamanho, forma e seleção de parcelas; já os erros não amostrais, na maioria das vezes tende a ser sistemáticos, e estão relacionados com a utilização de equipamentos para as medições de altura e diâmetro (SOARES et al., 2011).

Couto; Bastos (1988) alertam que a estimação da altura de árvores em pé é uma operação onerosa e sujeita a erros. Segundo Perez (1989), os erros ocorridos nas medições de alturas de árvores em geral estão relacionados ao desempenho do operador, problemas no instrumento e condições de observação. Assim, ao se realizar medições da altura das árvores, alguns cuidados devem ser tomados, sob pena de se cometerem erros grosseiros na obtenção das medidas.

Ainda de acordo com Couto; Bastos (1988), o grau de ocupação do povoamento pode influenciar a medição da altura das árvores, pois este impossibilita a determinação de um ponto ótimo de visão no topo da árvore. Porém, Lingnau et al. (2008) afirmam que esse tipo de problema ocorre com maior frequência em florestas nativas, pois em florestas plantadas com espaçamentos regulares, o correto posicionamento do mensurador em relação à linha de plantio diminuem esse tipo de problema.

Uma das fontes de erros comum na estimação da altura é a inclinação do tronco da árvore, fato comum em plantios florestais em regiões com ocorrência de ventos fortes. De acordo com Husch et al. (2003), ao se estimar a altura de árvores com esta característica, o mensurador deverá tomar cuidados para não aumentar a magnitude do erro de estimação. Neste contexto é relevante destacar também que os aparelhos de uso mais corrente para estimar a altura são baseados em princípios trigonométricos, o que de certa maneira tem relação com os erros que se pode cometer ao se estimar a altura de árvores com tronco inclinado.

Considerando o exposto e assumindo que a estimação da altura de árvores com tronco inclinado empregando-se aparelhos com base em princípio trigonométrico pode levar a erros, objetivou-se avaliar a magnitude destes erros por meio de simulação, levando em consideração variáveis que afetam o desempenho desses aparelhos, como o tipo de terreno (inclinado ou plano), a altura total da árvore, o ângulo de inclinação do tronco e a distância do observador à árvore.

## 2. MATERIAL E MÉTODOS

Os modelos utilizados para a simulação da medição de altura basearam-se no princípio de funcionamento dos aparelhos trigonométricos. Nesse sentido, foram consideradas quatro situações: uma em que a árvore está inclinada para o lado do mensurador e outra em que está inclinada em sentido oposto ao mensurador, sendo estas situações em terreno plano e inclinado (Figura 1).

De acordo com a Figura 1, os segmentos AM, MB, BD e BC representam, respectivamente, a altura do mensurador, a distância do mensurador à base da árvore, a altura total real da árvore e a altura medida pelo aparelho trigonométrico, sendo a distância reduzida da árvore ao observador representada por (*d*). Note que em terreno plano, MB é igual a (*d*). Ainda, para auxiliar o desenvolvimento dos modelos de simulação, foram definidas na Figura 1 as seguintes variáveis: ângulo entre o olho do mensurador e a copa da árvore ( $\alpha$ ); o ângulo entre o olho do mensurador e a base da árvore ( $\beta$ ); o ângulo de inclinação da árvore em relação ao terreno ( $\delta$ ); o ângulo de inclinação do terreno ( $\theta$ ); a altura total verdadeira da árvore inclinada (*H*) e a altura medida de forma incorreta pelo aparelho (*H'*). Os ângulos ( $\gamma$ ) e ( $\chi$ ) apresentados na Figura 1, serviram como variáveis auxiliares para aplicação das relações trigonométricas nos modelos de simulação propostos. Tomando-se como base a situação A da Figura 1 e as variáveis ora definidas, pode-se demonstrar que:

$$H' = d \cdot [\text{tg}(\alpha) + \text{tg}(\beta)] \quad (1)$$

Pela lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{H}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen}(\chi - \delta)}$$

$$H = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \overline{AD}}{\text{sen}(\chi - \delta)} \quad (2)$$

Sabendo que:

$$\cos(\beta) = \frac{d}{AB}$$

$$\overline{AB} = \frac{d}{\cos(\beta)} \quad (3)$$

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\gamma)} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen}(\chi - \delta)}$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AB} \cdot \text{sen}(\chi - \delta)}{\text{sen}(\gamma)} \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4), tem-se:

$$\overline{AD} = \frac{d \cdot \text{sen}(\chi - \delta)}{\cos(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)} \quad (5)$$

Substituindo (5) em (2), tem-se

$$H = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) \cdot d \cdot \text{sen}(\chi - \delta)}{\text{sen}(\chi - \delta) \cdot \text{cos}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)}$$

$$H = \frac{d \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)} \quad (6)$$

A expressão (6) permite calcular a altura correta ( $H$ ) da árvore para a situação A, desde que se conheçam os ângulos e a distância ( $d$ ) contidos na expressão. Para facilitar o uso da expressão (6), considere que:

$$\gamma = 90 - \beta \quad (7)$$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta - \chi - \delta \quad (8)$$

Substituindo (7) em (8) têm-se:

$$\gamma = 90 - \alpha + \delta \quad (9)$$

Seguindo raciocínio análogo, pode-se demonstrar as expressões de cálculo para as situações B, C e D. Na sequência, é apresentado um resumo das expressões demonstradas para cada uma das situações da Figura 1:

Situação	Fórmula Cálculo ( $H$ )	Ângulo ( $\gamma$ )
A	$H = \frac{d \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)}$	$\gamma = 90 - \alpha + \delta$
B	$H = \frac{d \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)}$	$\gamma = 90 - \alpha - \delta$
C	$H = \frac{d \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{cos}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)}$	$\gamma = 90 - \alpha + \delta$
D	$H = \frac{d \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{cos}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma)}$	$\gamma = 90 - \alpha - \delta$

Para utilização das expressões nos casos de terreno inclinado, foi estabelecida uma declividade mínima ( $\theta$ ) do terreno, de modo que a base da árvore estivesse em nível superior à altura do olho do mensurador. Esta condição é fundamental para se chegar às expressões de altura total ( $H$ ) obtidas nas situações C e D da Figura 1, uma vez que na aplicação do princípio trigonométrico, quando esta situação ocorre, há uma subtração das tangentes dos ângulos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ). Assim, para ( $\theta$ ) inferiores à declividade mínima definida, para efeito de simulação, devem-se empregar as expressões de altura total ( $H$ ) descritas nas situações A e B da Figura 1. Para o cálculo do ( $\theta$ ) mínimo, considerou-se a seguinte expressão:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\overline{AM}}{d} \quad (10)$$

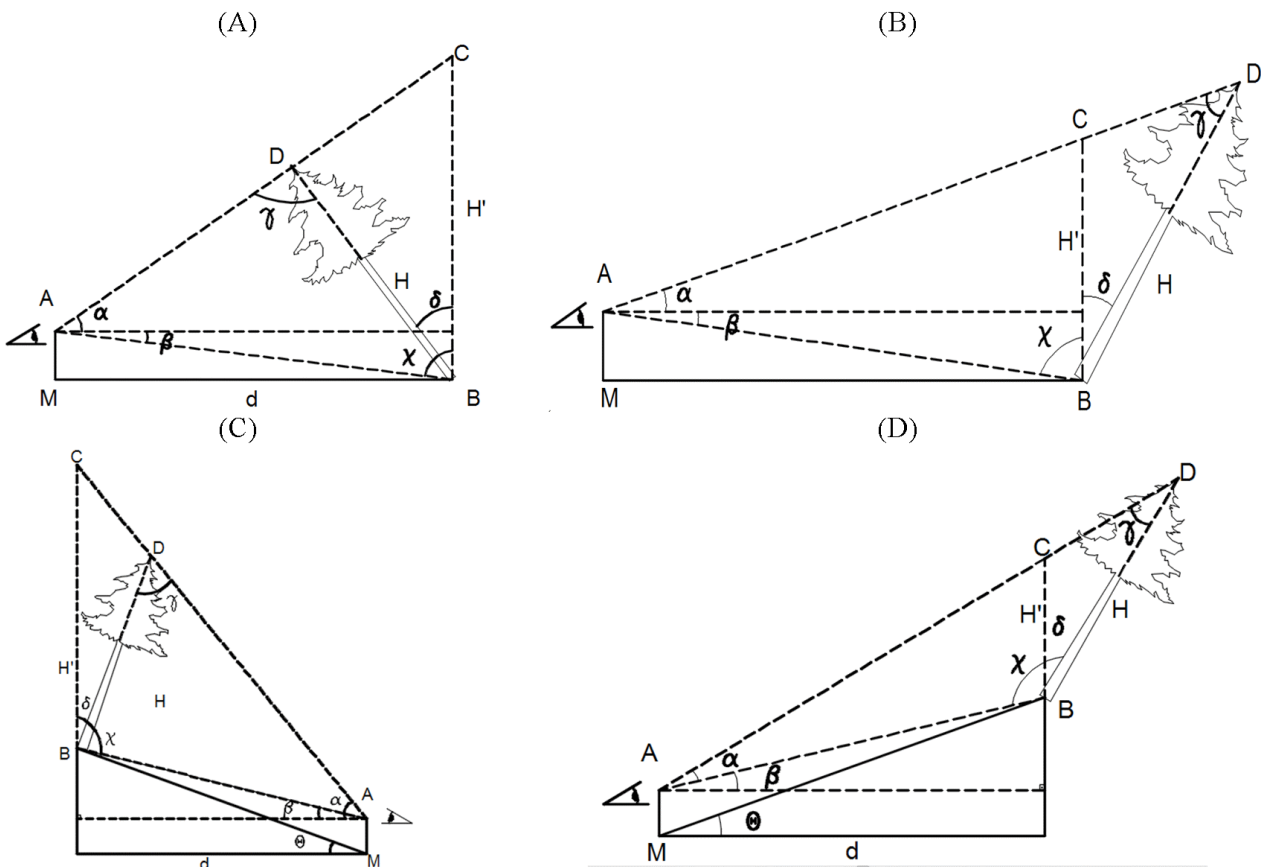


Figura 1. Situações do mensurador em relação ao terreno e à árvore, sendo (A) – árvore inclinada em terreno plano no mesmo sentido do mensurador; (B) – árvore inclinada em terreno plano no sentido oposto ao mensurador; (C) – árvore inclinada em terreno com declive no mesmo sentido do mensurador e (D) – árvore inclinada em terreno com declive no sentido oposto ao mensurador. Figure 1. Measurer situations in relation to the terrain and to the tree, being (A) - tree inclined on flat terrain on the same direction as the measurer; (B) - tree inclined on flat terrain on the opposite direction of the measurer; (C) - tree inclined on terrain with slope in the same direction of the measurer e (D) - tree inclined on terrain with slope in the opposite direction of the measurer.

Tendo em vista os modelos de simulação construídos, para a realização dos cálculos, levou-se em conta um observador com a altura do olho ao nível do solo igual a 1,80 metros e diferentes distâncias (*d*) do observador à árvore (de 10 a 35 metros com intervalo de 5 metros). No caso das situações C e D da Figura 1, considerou-se uma inclinação do terreno ( $\theta$ ) igual a 20°. Os valores de ( $\beta$ ) foram calculados a partir da altura do olho do observador (AM) e de sua distância à árvore (*d*). Este cálculo não é afetado pela declividade do terreno ( $\theta$ ) e nem pela altura total da árvore (*H*) no caso de terreno plano. Já no caso do terreno inclinado, os valores de ( $\beta$ ) são influenciados pelo ângulo de inclinação do terreno ( $\theta$ ), mas não o são pela altura total da árvore, conforme se percebe pela expressão a seguir:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)} - \frac{\overline{AM}}{d} \quad (11)$$

Ainda para efeito da simulação, foram consideradas que as alturas das árvores variaram de 10 a 35 metros em intervalos de 5 metros. Essa altura é de grande importância no cálculo do ângulo ( $\alpha$ ), que também é influenciado pela distância do observador à árvore (MB). Os valores de ( $\alpha$ ) foram obtidos por procedimento iterativo para as alturas e distâncias definidas. Para se avaliar a influência da inclinação do tronco da árvore, foram definidos valores de ( $\delta$ ) em relação ao terreno de 5 a 35° em intervalos de 5°. Situações de inclinação descritas no trabalho podem ocorrer em florestas plantadas devido a grande incidência de ventos em determinados locais, mas são comumente encontradas em florestas nativas devido a processos naturais que ocorrem nas florestas inequiduais.

Tendo em vista as distâncias reduzidas (*d*), as alturas totais das árvores (*H*) e os ângulos de inclinação ( $\delta$ ) definidos anteriormente, pôde-se, a partir das expressões deduzidas para

as situações A, B, C e D, calcular as medidas de altura geradas pelos aparelhos baseados em princípios trigonométricos (*H'*) para as situações propostas. Uma vez que a altura da árvore é conhecida, o erro ocorrido em cada situação foi calculado pela seguinte expressão:

$$ER(\%) = \frac{(H - H')}{H} \cdot 100 \quad (12)$$

em que *ER*(%) é o erro relativo em porcentagem, e *H* e *H'* a altura total verdadeira da árvore inclinada e a altura medida de forma incorreta pelo aparelho, respectivamente.

Os erros calculados para todas as situações consideradas foram então comparados de forma a se verificar a influência das variáveis definidas (distância reduzida, altura da árvore e inclinação do tronco) na ocorrência do erro, tanto em terreno plano quanto em declive. Para a comparação, levou-se em conta que os modelos propostos são determinísticos, e, portanto, diferenças matemáticas são significativas.

### 3. RESULTADOS

#### 3.1. Simulação dos erros em terreno plano

Os resultados obtidos para a simulação dos erros ocorridos em terreno plano estão apresentados nas Tabelas 1 e 2.

Pela observação da Tabela 1 e levando em consideração o modelo de simulação adotado, é perceptível que, para árvores com mesma altura total (*H*) medidas a uma mesma distância (*d*), com o aumento do ângulo de inclinação do tronco da árvore ( $\delta$ ) no sentido do mensurador, há um aumento do erro relativo na estimativa da altura (*H'*), ou seja, sob as condições relacionadas, quanto mais inclinado o tronco da árvore, mais o aparelho trigonométrico irá superestimar a verdadeira altura da árvore (*H*).

Tabela 1. Erros relativos cometidos na medição de diferentes alturas totais (*H*) de árvores, considerando que a árvore está em terreno plano, inclinada no sentido do mensurador ( $\delta$ ) e a diferentes distâncias (*d*) do mesmo.

Table 1. Relative errors in the measurement of different total heights (*H*) of trees, considering that the tree is on flat terrain, inclined in the direction of the measurer and at different distances from the measurer.

$\delta$	<i>H</i> = 10 m						<i>H</i> = 15 m					
	<i>d</i> (m)											
	10	15	20	25	30	35	10	15	20	25	30	35
5	-8,0	-4,9	-3,7	-3,1	-2,9	-2,0	-12,7	-8,6	-6,1	-4,4	-4,0	-3,4
10	-16,3	-9,9	-6,2	-5,1	-4,0	-2,7	-29,8	-17,4	-11,4	-9,0	-7,0	-5,8
15	-24,5	-13,6	-8,3	-6,5	-4,0	-3,3	-51,1	-27,0	-16,9	-12,2	-9,5	-7,2
20	-33,8	-17,3	-10,0	-6,5	-4,0	-3,3	-80,4	-37,7	-22,3	-15,3	-11,3	-8,2
25	-44,2	-19,9	-10,4	-6,5	-2,9	-1,4	-130,1	-49,6	-27,9	-17,4	-11,7	-8,2
30	-55,6	-21,1	-10,4	-4,6	-0,6	-0,1	-212,2	-63,1	-32,1	-18,6	-11,7	-7,7
35	-69,1	-23,0	-7,9	-1,7	-0,1	-0,1	-418,4	-75,8	-34,6	-19,0	-10,4	-5,3
$\delta$	<i>H</i> = 20 m						<i>H</i> = 25 m					
5	-18,7	-11,9	-8,3	-6,7	-5,7	-4,4	-25,4	-15,4	-11,1	-8,6	-7,2	-6,0
10	-46,4	-25,8	-17,7	-13,2	-10,2	-8,4	-68,8	-35,9	-24,0	-17,9	-14,1	-11,5
15	-90,5	-42,6	-27,3	-19,6	-14,8	-12,1	-162,6	-65,2	-39,3	-28,1	-21,5	-17,4
20	-178,8	-66,2	-38,4	-26,8	-19,6	-15,0	-509,4	-109,7	-58,9	-39,9	-28,9	-22,2
25	-437,9	-97,5	-50,8	-33,1	-23,3	-16,7	-	-189,5	-84,4	-52,7	-36,3	-26,8
30	-	-145,4	-64,8	-38,5	-26,2	-18,3	-	-388,9	-121,2	-66,0	-43,8	-31,1
35	-	-219,0	-80,8	-44,9	-27,0	-18,3	-	-1625,4	-172,2	-84,0	-50,7	-34,1
$\delta$	<i>H</i> = 30 m						<i>H</i> = 35 m					
5	-33,1	-19,4	-13,9	-10,8	-8,8	-7,4	-41,9	-24,2	-16,8	-13,1	-10,6	-8,7
10	-99,0	-48,0	-31,4	-22,8	-18,2	-14,8	-144,8	-62,9	-39,8	-28,9	-22,3	-18,2
15	-311,4	-93,9	-54,3	-37,8	-28,6	-22,7	-876,8	-136,4	-73,0	-49,0	-36,1	-28,6
20	-	-186,7	-87,2	-55,7	-39,7	-31,1	-	-350,2	-127,7	-75,9	-53,6	-40,3
25	-	-455,4	-138,5	-78,4	-53,1	-39,3	-	-	-236,0	-115,0	-74,1	-53,4
30	-	-	-230,8	-108,2	-67,3	-47,5	-	-	-558,3	-177,4	-101,3	-68,3
35	-	-	-456,9	-152,2	-84,2	-55,3	-	-	-	-298,2	-138,1	-85,5



Tabela 2. Erros relativos cometidos na medição de diferentes alturas totais ( $H$ ) de árvores, considerando que a árvore está em terreno plano, inclinada no sentido oposto ao mensurador ( $\delta$ ) e a diferentes distâncias ( $d$ ) do mesmo.

Table 2. Relative errors in the measurement of different total heights ( $H$ ) of trees, considering that the tree is on flat terrain, inclined in the opposite direction of the measurer and at different distances from the measurer.

$\delta$	$H=10\text{ m}$						$H=15\text{ m}$					
	$d\text{ (m)}$											
	10	15	20	25	30	35	10	15	20	25	30	35
5	6,7	4,3	3,2	3,1	2,2	1,9	10,2	7,0	5,3	4,9	3,9	3,1
10	13,3	9,5	7,2	6,5	5,6	5,1	19,0	14,0	11,0	9,6	8,0	7,2
15	19,5	14,6	12,4	10,3	9,4	8,3	26,9	20,6	17,1	14,5	12,8	11,8
20	25,4	19,9	17,0	15,0	13,3	12,1	33,6	26,7	22,4	20,0	18,0	16,2
25	30,6	25,0	21,6	19,7	17,7	17,2	39,8	32,6	28,1	25,0	23,0	21,1
30	36,0	30,4	26,5	24,3	22,6	21,6	45,4	38,2	33,6	30,6	28,0	26,4
35	41,2	35,6	32,1	29,8	28,0	26,6	50,3	43,5	39,0	35,8	33,7	31,6
$\delta$	$H=20\text{ m}$						$H=25\text{ m}$					
5	13,7	9,4	7,7	6,1	5,1	4,5	16,9	12,0	9,4	7,7	6,6	5,7
10	24,4	18,1	14,6	12,3	10,6	9,4	29,0	21,8	17,7	15,0	13,1	11,3
15	33,3	25,8	21,2	18,2	16,2	14,6	38,4	30,2	25,2	21,7	19,3	17,1
20	40,5	32,6	27,5	24,3	21,7	19,6	46,0	37,4	31,9	28,1	25,2	23,0
25	46,8	38,7	33,5	29,8	27,3	25,2	52,2	43,7	38,0	34,1	30,9	28,7
30	52,2	44,3	39,2	35,3	32,8	30,4	57,4	49,4	43,8	39,9	36,6	34,3
35	57,0	49,6	44,6	41,0	38,2	36,2	62,1	54,6	49,2	45,3	42,1	39,6
$\delta$	$H=30\text{ m}$						$H=35\text{ m}$					
5	19,8	14,3	11,1	9,2	7,7	6,7	22,3	16,3	13,0	10,6	8,9	7,9
10	33,1	25,2	20,5	17,4	15,0	13,5	36,8	28,4	23,3	19,9	17,1	15,3
15	42,9	34,2	28,7	24,8	21,9	19,7	46,7	37,8	31,8	27,5	24,5	22,2
20	50,6	41,7	35,9	31,7	28,3	25,8	54,4	45,4	39,3	34,7	31,2	28,7
25	56,6	48,0	42,1	37,8	34,4	31,7	60,3	51,7	45,7	41,2	37,5	34,8
30	61,7	53,7	47,8	43,5	40,2	37,6	65,3	57,2	51,3	48,9	43,4	40,6
35	66,0	58,6	53,2	48,9	45,7	43,0	69,3	62,0	54,5	52,7	48,9	46,1

Pela observação da Tabela 1 é possível observar também que o erro relativo na medição da altura empregando aparelhos trigonométricos, considerando-se mesmas distâncias ( $d$ ) e mesmos ângulos de inclinação do tronco da árvore ( $\delta$ ), aumenta à medida que aumenta a altura da árvore ( $H$ ), admitindo-se que a árvore está inclinada no mesmo sentido do observador.

Ainda de acordo com a Tabela 1, para árvores com mesma altura total ( $H$ ) e mesmo ângulo de inclinação do tronco da árvore ( $\delta$ ) no mesmo sentido do mensurador, considerando diferentes distâncias ( $d$ ), constata-se que o erro relativo diminui à medida que o operador se afasta da árvore.

A Tabela 2 permite inferir sobre o efeito do erro considerando que a árvore está inclinada no sentido oposto ao mensurador. Para o caso de árvores com mesma altura total ( $H$ ) e mesma distância ( $d$ ) para diferentes ângulos de inclinação do tronco ( $\delta$ ), os erros aumentam à medida que o ângulo de inclinação da árvore aumenta, sendo resultado semelhante ao encontrado na situação anterior em que a árvore está inclinada no sentido do observador. A diferença está no fato de que neste caso os erros encontrados pelos aparelhos trigonométricos ( $H'$ ) subestimam as verdadeiras alturas das árvores ( $H$ ).

Nota-se que o erro relativo, considerando-se mesmas distâncias ( $d$ ) e ângulos de inclinação do tronco da árvore ( $\delta$ ), aumenta à medida que aumenta a altura da árvore, no entanto, subestimando-as. A tendência em subestimar se mantém quando se tem árvores com mesma altura total ( $H$ ) e mesmo ângulo de inclinação do tronco ( $\delta$ ), considerando diferentes distâncias ( $d$ ). Nessas condições, quando a árvore está inclinada no sentido oposto ao mensurador, os erros relativos são de subestimação e diminuem à medida que o operador se afasta da árvore.

### 3.2 Simulação dos erros em terrenos inclinados

Os resultados obtidos para a simulação em terreno inclinado estão apresentados nas Tabelas 3 e 4, em que verifica-se as

mesmas tendências encontradas em terreno plano, isto é, maiores erros para árvores mais altas, menores erros para as maiores distâncias ( $d$ ), maiores erros quanto maior o ângulo de inclinação da árvore e maiores erros para árvores inclinadas no sentido do mensurador.

Verificou-se também que quando a árvore está inclinada no sentido do mensurador ocorrem erros de superestimação e em caso contrário os erros são de subestimação. A diferença está no fato de que em terreno inclinado, considerando-se as mesmas condições, os erros são significativamente maiores, em algumas situações podendo chegar a mais de 500%.

## 4. DISCUSSÃO

### 4.1. Simulação dos erros em terreno plano

O aumento do erro relativo quanto mais inclinado o tronco da árvore, ao observar o ângulo de inclinação do tronco da árvore ( $\delta$ ) no sentido do mensurador (Tabela 1) pode ser verificado nos casos em que o aumento da inclinação do tronco da árvore não fez o valor de ( $\alpha$ ) exceder a 80 graus. Para ( $\alpha$ ) acima deste valor, o observador teria que inclinar o aparelho a quase 90 graus, ou seja, ter os seus olhos voltados para o céu, não fazendo sentido calcular o erro.

O aumento do erro relativo também ocorre com o aumento da altura da árvore (Tabela 1), isto porque para árvores maiores o ( $\alpha$ ) será maior, e de acordo com a expressão (1), quanto maior o ( $\alpha$ ), maior será a altura obtida pelo aparelho trigonométrico ( $H'$ ), o que resultará em erros de superestimação cada vez maiores à medida que se tem árvores mais altas.

Curto et al. (2013), em estudo realizado em uma floresta estacional semidecidual, considerando o uso de dois equipamentos baseados em princípios trigonométricos, verificaram em condições de terreno plano, que com o aumento da classe de altura, há aumento do erro relativo. Esse

Tabela 3. Erros relativos cometidos na medição de diferentes alturas totais (H) de árvores, considerando que a árvore está em terreno com declividade, inclinada no sentido do mensurador ( $\delta$ ) e a diferentes distâncias (d) do mesmo.

Table 3. Relative errors in the measurement of different total heights (H) of trees, considering that the tree is on sloping terrain, inclined in the direction of the measurer and at different distances.

$\delta$	H = 10 m						H = 15 m					
	d (m)						d (m)					
	10	15	20	25	30	35	10	15	20	25	30	35
5	-13,4	-8,3	-6,2	-4,8	-3,9	-3,3	-18,3	-11,6	-8,4	-6,7	-5,4	-4,8
10	-27,2	-16,6	-11,5	-8,9	-7,1	-5,4	-41,8	-24,3	-17,5	-13,4	-10,4	-8,6
15	-42,9	-24,8	-16,4	-11,8	-9,0	-7,6	-74,1	-39,2	-25,7	-18,8	-15,0	-11,8
20	-62,8	-32,3	-20,8	-14,8	-11,0	-8,3	-118,0	-56,4	-34,9	-24,5	-18,7	-14,6
25	-83,4	-40,2	-25,4	-16,6	-11,6	-8,3	-189,6	-75,7	-44,2	-30,3	-21,3	-16,2
30	-111,5	-47,9	-27,7	-17,2	-11,6	-7,6	-322,1	-98,5	-53,0	-34,1	-23,5	-16,8
35	-140,2	-56,0	-29,5	-17,2	-10,3	-5,4	-638,0	-126,0	-62,9	-37,5	-24,5	-16,8
$\delta$	H = 20 m						H = 25 m					
5	-24,8	-15,1	-10,9	-8,7	-7,0	-5,9	-31,8	-19,1	-13,6	-10,4	-8,6	-7,3
10	-61,1	-33,8	-23,2	-17,0	-13,8	-11,5	-85,8	-44,4	-29,9	-22,2	-17,5	-14,8
15	-121,3	-57,0	-37,2	-26,8	-20,4	-16,8	-202,2	-80,6	-49,6	-35,5	-27,1	-21,8
20	-237,8	-88,1	-52,5	-36,4	-27,4	-21,2	-684,5	-137,5	-75,0	-50,7	-37,0	-29,1
25	-597,0	-132,0	-70,9	-46,7	-34,1	-25,8	-	-244,1	-107,8	-67,5	-47,8	-36,3
30	-	-196,8	-91,7	-57,2	-39,5	-28,9	-	497,5	-155,7	-87,9	-58,9	-42,7
35	-	-307,5	-117,6	-66,6	-33,5	-30,9	-	-2176,9	-226,7	-112,3	-70,9	-49,0
$\delta$	H = 30 m						H = 35 m					
5	-39,2	-23,2	-16,6	-12,5	-10,6	-8,8	-48,5	-27,3	-19,3	-14,2	-12,1	-10,2
10	-119,3	-57,9	-37,7	-27,8	-21,7	-17,6	-166,2	-72,4	-45,9	-33,6	-26,4	-21,5
15	-377,0	-113,5	-66,3	-46,1	-34,6	-27,5	-1058,8	-160,3	-85,1	-58,0	-43,1	-34,1
20	-	-222,3	-106,1	-67,5	-49,3	-37,9	-	-411,0	-149,6	-90,3	-63,2	-48,5
25	-	-553,0	-170,0	-96,3	-65,5	-49,2	-	-	-276,7	-137,2	-88,7	-65,0
30	-	-	-282,2	-134,2	-85,1	-61,0	-	-	-667,9	-214,6	-122,7	-83,5
35	-	-	-567,9	-188,5	-109,5	-72,6	-	-	-	-362,0	-168,3	-106,1

Tabela 4. Erros relativos cometidos na medição de diferentes alturas totais (H) de árvores, considerando que a árvore está em terreno com declividade, inclinada no sentido oposto ao mensurador ( $\delta$ ) e a diferentes distâncias (d) do mesmo.

Table 4. Relative errors in the measurement of different total heights (H) of trees, considering that the tree is in sloping terrain, inclined in the opposite direction of the measurer and at different distances.

$\delta$	H = 10 m						H = 15 m					
	d (m)						d (m)					
	10	15	20	25	30	35	10	15	20	25	30	35
5	10,7	7,9	6,1	4,2	3,7	3,0	14,4	10,2	7,7	6,5	5,2	4,6
10	21,0	15,4	12,0	9,7	8,6	7,9	26,6	19,4	15,3	12,9	11,3	9,7
15	30,6	23,0	18,2	15,7	13,6	12,0	37,1	28,1	22,8	19,5	17,2	15,2
20	39,1	30,2	24,7	21,6	19,0	17,5	45,9	35,9	29,9	25,8	23,0	21,1
25	46,9	37,1	31,4	27,3	25,0	22,9	53,8	43,3	36,7	32,4	29,0	26,9
30	54,2	44,1	37,6	33,5	30,9	28,3	60,7	50,3	43,6	38,7	35,4	32,6
35	60,9	50,5	44,0	40,1	36,8	34,3	67,1	56,6	49,8	45,2	41,6	39,1
$\delta$	H = 20 m						H = 25 m					
5	17,7	12,5	9,6	7,8	6,6	5,6	20,6	14,9	11,6	9,4	8,2	7,0
10	31,4	23,4	18,7	15,7	13,4	12,0	35,6	26,8	21,7	18,2	15,8	13,8
15	42,5	32,6	27,0	23,1	20,2	18,2	47,0	36,8	30,4	26,3	23,0	20,7
20	51,4	41,2	34,4	30,2	26,8	24,2	56,0	45,4	38,5	33,7	30,1	27,3
25	59,0	48,6	41,5	36,8	33,1	30,4	63,4	52,7	45,6	40,7	36,8	33,6
30	65,7	55,3	48,2	43,2	39,6	36,8	69,5	59,2	52,1	47,0	43,1	40,0
35	71,4	61,3	54,5	49,6	45,5	47,6	74,8	65,1	58,4	53,1	49,2	46,1
$\delta$	H = 30 m						H = 35 m					
5	23,3	16,8	13,2	10,9	9,2	8,1	25,9	18,8	14,8	12,3	10,6	9,2
10	39,2	30,1	24,5	20,4	17,8	15,8	42,7	33,0	26,8	22,7	20,0	17,7
15	50,9	40,3	33,7	29,3	25,7	23,1	54,2	43,5	36,6	31,8	28,1	25,5
20	59,7	49,2	42,0	37,0	33,0	30,0	62,9	52,4	45,0	39,9	35,8	32,7
25	66,8	56,5	49,2	43,8	39,9	36,5	69,6	59,4	52,3	46,7	42,5	39,2
30	72,6	62,7	55,7	50,4	46,3	43,0	75,0	65,6	58,9	53,3	49,1	45,6
35	77,5	68,2	61,6	53,5	52,4	49,2	79,7	70,9	64,2	59,2	55,0	51,6

fato também foi observado por Oliveira et al. (2014) em um povoamento de *Eucalyptus*.

Silva et al. (2012a) ao comparar métodos de medição de altura total de árvores em floresta natural concluíram que o aumento na altura da árvore comprometeu a precisão da estimação pelos métodos avaliados, sendo o hipsômetro Vertex III o aparelho baseado em princípio trigonométrico utilizado no referido trabalho.

Já, ao considerar diferentes distâncias (*d*), constata-se que o erro relativo diminui à medida que o operador se afasta da árvore (Tabela 1). Essa tendência ocorre tendo vista que à medida que o mensurador se afasta da árvore, o ( $\alpha$ ) diminui, e de acordo com a expressão (1), quanto menor o ( $\alpha$ ), maior será a altura registrada no aparelho trigonométrico ( $H'$ ), resultando em erros de superestimação cada vez menores.

Uma conclusão importante é que os erros ocorridos quando o mensurador mede a altura da árvore estando ela inclinada em sua direção são significativamente maiores do que a situação contrária. Assim, pode-se afirmar que se erra menos medindo a altura da árvore no sentido oposto à inclinação (situações B e D da Figura 1) do que realizando a medição no mesmo sentido em que a árvore está inclinada (situações A e C da Figura 1). Este fato pode ser explicado pelo aumento do ângulo ( $\alpha$ ) à medida que a árvore se inclina no sentido do mensurador. Quando a árvore está inclinada no sentido oposto ao mensurador, o ângulo ( $\alpha$ ) diminui, proporcionando menores erros relativos.

Silva et al. (2012b), comparando três aparelhos de medição baseados em princípios trigonométricos (clinômetro digital Haglöf, hipsômetro Haga e hipsômetro Vertex III) em quatro distâncias (15, 20, 25 e 30 m) para um plantio do híbrido *Eucalyptus urophylla* x *Eucalyptus grandis*, obtiveram como resultado, que na classe de medição para árvores com altura superiores a 25 m, os aparelhos Haglöf e o Vertex exigem uma maior inclinação dos mesmos para realizar-se as medidas de altura total. Desse modo, alturas maiores ficam mais sensíveis a essa inclinação, o que provoca um maior erro para árvores com alturas superiores a 25 m.

Ainda, com base no trabalho de Silva et al. (2012b), avaliando o efeito da distância na medição das alturas percebe-se que os maiores erros foram encontrados para a menor distância (15 metros) e os melhores resultados podem ser atribuídos às distâncias intermediárias de 20 e 25 metros. Esses resultados estão de acordo com o que se espera, uma vez que, ao se aproximar mais da árvore, é necessário uma maior inclinação do aparelho. Resultados semelhantes foram encontrados por Couto; Bastos (1988), em que o menor erro percentual foi obtido para a distância de 20 metros da árvore.

Silva et al. (2012b), corroboraram seus resultados concluindo ainda que é mais difícil medir árvores com maior altura pelo simples fato de que é mais difícil ver a copa e também pelo fato de ter que inclinar mais o aparelho. Segundo esses autores, informações como essas auxiliam o treinamento de equipes de inventários, especialmente de povoamentos mais velhos e em locais mais produtivos, onde a chance de encontrar árvores mais altas é maior.

Couto; Bastos (1988) estudando três aparelhos baseados em princípios trigonométricos (Blume-Leiss, Haga e Suunto) em três distâncias (15, 20 e 30 m) para povoamentos de *Eucalyptus* em região plana, obtiveram como resultado que os aparelhos baseados em princípios trigonométricos apresentam menores erros que os aparelhos baseados em princípios geométricos, fato corroborado por Husch et al. (2003). Ainda de acordo com Couto; Bastos (1988) os maiores erros são encontrados nas maiores alturas e, mesmo nas maiores alturas, quando utilizadas maiores distâncias para a medição, há diminuição do erro de medição das alturas das árvores. Loetsch et al. (1973) sugerem como regra prática que a distância do observador à árvore seja no mínimo igual à altura a ser medida. Essa sugestão condiz com os resultados obtidos.

#### 4.2. Simulação dos erros em terrenos inclinados

As mesmas tendências encontradas em terreno plano foram observadas para terreno inclinado, porém atingindo erros significativamente maiores (Tabelas 3 e 4).

Cabe considerar que neste trabalho não se variou o ângulo de inclinação, trabalhando-se com um ângulo fixo ( $\theta$ ) igual a 20°. Entretanto, não é difícil verificar, empregando-se o modelo de simulação proposto, que com o aumento do ângulo ( $\theta$ ) os erros na medição de altura de árvores inclinadas irão aumentar ainda mais seguindo as tendências já relatadas.

Tendo em vista a magnitude dos erros encontrados em terrenos inclinados, fica claro que nessa situação nenhuma das possibilidades de medição apresentadas na Figura 1 são adequadas para se medir a altura da árvore.

Uma alternativa de procedimento de medição nestes casos é apresentada por Husch et al. (2003). De acordo com estes autores, todos os hipsômetros assumem que as árvores são verticais, sendo que as alturas oriundas de árvores inclinadas no sentido oposto ao mensurador serão subestimadas, enquanto que árvores inclinadas em direção ao observador serão superestimadas, tal como encontrado neste trabalho. Para corrigir este problema, estes autores sugerem que a medida da altura da árvore com aparelho trigonométrico seja feita lateralmente, multiplicando-se o resultado encontrado pela secante do ângulo de inclinação da árvore, ou seja:

$$H = H' \cdot \sec(\delta)$$

em que:  $H$  e  $H'$  = altura total verdadeira da árvore inclinada e a altura medida de forma incorreta pelo aparelho, respectivamente.

Outro procedimento alternativo, apresentado em Soares et al. (2011), é utilizar o teorema de Pitágoras para se calcular a verdadeira altura da árvore ( $H$ ), tal como apresentado na expressão a seguir:

$$H = \sqrt{(H')^2 + (db)^2}$$

em que:  $(db)$  é a distância reduzida da base da árvore até ao ponto de projeção da copa da árvore. Maiores detalhes sobre estas alternativas podem ser obtidos nas referidas literaturas.

## 5. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos permitem afirmar que o ângulo de inclinação da árvore ( $\delta$ ), a distância reduzida do mensurador até a base da árvore ( $d$ ), a altura da árvore ( $H$ ) e o ângulo de inclinação do terreno ( $\theta$ ) afetam o desempenho dos aparelhos baseados em princípios trigonométricos na estimativa da altura. Mais especificamente pode-se afirmar que:

- Quanto menor o ângulo de inclinação, maior a distância do mensurador à árvore e menor a altura da árvore, mais próximo do valor verdadeiro estará a mensuração da altura da árvore.
- Os erros de medição decorrentes de terrenos planos foram menores quando comparados com os encontrados em terrenos inclinados, não importando se a árvore está inclinada no mesmo sentido do mensurador ou em sentido contrário.
- Em todas as situações avaliadas, quando a árvore está inclinada no sentido do mensurador, ocorrem erros de superestimação da altura, e quando está inclinada em sentido oposto ao mensurador os erros são de subestimação.
- Árvores inclinadas no sentido do mensurador provocam erros de medição maiores do que quando estão inclinadas em sentido oposto ao mensurador.

## 6. REFERENCIAS

- COUTO, H. T. Z.; BASTOS, N. L. M. Erros de medição de altura em povoamentos de *Eucalyptus* em região plana. **IPEF**, Piracicaba, n. 39, p. 21-31, 1988.
- CURTO, R. A.; SILVA, G. F.; SOARES, C. P. B.; MARTINS, L. T.; DAVID, H. C. Métodos de estimação de altura de árvores em floresta estacional semidecidual. **Revista Floresta**, Curitiba, v. 43, n. 1, p. 105-116, 2013.
- GONÇALVES, D. de A.; ELDIK, T. van; POKORNY, B. Uso do dendrômetro a laser em florestas tropicais: aplicações para o manejo florestal na Amazônia. **Revista Floresta**, Curitiba, v. 39, n. 1, p. 175-187, 2009.
- HUSCH, B.; BEERS, T. W.; KERSHAW JR, J. A. **Forest mensuration**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003. 443p.
- LINGNAU, C.; SILVA, M.; SANTOS, D.; MACHADO, L. J. Mensuração de alturas de árvores individuais a partir de dados laser terrestre. **Revista Ambiência**, Guarapuava, v. 4, n. 1, p. 85-96, 2008.
- LOETSCH, F.; ZOHRER, F.; HALLER, K. E. **Forest inventory**. Munich, Verlagsgesellschaft, 1973. 469p.
- MACHADO, S. A.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Dendrometria**. 2.ed. Guarapuava, Unicentro, 2009. 316p.
- OLIVEIRA, X. M.; OLIVEIRA, R. R.; RAMALHO, F. M. G.; CABACINHA, C. D.; ASSIS, A. L. Precisão e tempo de operação de alguns instrumentos para medir altura de árvores. **Enciclopédia Biosfera**, Goiânia, v. 10, n. 18, p. 2336-2344, 2014.
- PEREZ, R. D. N. Errores en la medicion de alturas totales con Clinometro Suunto y una vara de longitud conecida. **Tatascan**, Siguatepeque, v. 6, n. 1, p. 25-30, 1989.
- SILVA, G. F.; XAVIER, A. C.; RODRIGUES, F. L.; PETERNELLI, L. A. Análise da influência de diferentes tamanhos e composições de amostras no ajuste de uma relação hipsométrica para *Eucalyptus grandis*. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 31, n. 4, p. 685-694, 2007. <http://dx.doi.org/10.1590/S0100-67622007000400013>
- SILVA, G. F.; CURTO, R. A.; SOARES, C. P. B.; PIASSI, L. C. Avaliação de métodos de medição de altura em florestas naturais. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 36, n. 2, p. 341-348, 2012a. <http://dx.doi.org/10.1590/S0100-67622012000200015>
- SILVA, G. F.; OLIVEIRA, O. M.; SOUZA, C. A. M.; SOARES, C. P. B.; LEMOS, R. Influência de diferentes fontes de erro sobre as medições das alturas das árvores. **Cerne**, Lavras, v. 18, n. 3, p. 397-405, 2012b. <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-77602012000300006>
- SCHNEIDER, P. R.; SCHNEIDER, P. S. P. **Introdução ao Manejo Florestal**. Santa Maria: UFSM. 2008. 566p.
- SOARES, C. P. B.; NETO, F. P.; SOUZA, A. L. **Dendrometria e Inventário Florestal**. Viçosa: UFV, 2011. 276p.
- SOUZA A. L.; SOUZA D. R. Estratificação vertical em floresta ombrófila densa de terra firme não explorada, Amazônia Oriental. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 28, n. 5, p. 691-698, 2004.