



Modelagem bayesiana da temperatura máxima do ar em Divinópolis-MG

Thales Rangel FERREIRA ¹ , Luiz Alberto BEIJO ² , Gilberto Rodrigues LISKA ^{*3}
Giulia Eduarda BENTO ³

¹ Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agrônômica, Universidade de São Paulo, Piracicaba, SP, Brasil.

² Departamento de Estatística, Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, MG, Brasil.

³ Centro de Ciências Agrárias, Universidade Federal São Carlos, Araras, SP, Brasil.

*E-mail: gilbertoliska@ufscar.br

Submetido em: 20/05/2024; Aceito em: 03/08/2024; Publicado em: 19/08/2024.

RESUMO: Nesta pesquisa, objetivou-se modelar o comportamento da temperatura máxima trimestral da cidade de Divinópolis-MG, ajustando a distribuição Generalizada de Valores Extremos às séries históricas de temperaturas máximas através de dois métodos distintos: Máxima Verossimilhança (MV) e Inferência Bayesiana. Objetivou-se também, para cada tempo de retorno, calcular os níveis de retorno de temperatura máxima da referida localidade, avaliando a acurácia e o erro médio de predição (EMP). Para o cálculo dos níveis de retorno foram utilizados o método de MV e abordagens Bayesianas utilizando diferentes estruturas de *priori*, considerando distribuições *a priori* informativas (Belo Horizonte e Lavras) e não informativas, e também, pelo método de Máxima Verossimilhança. Analisando-se os resultados do EMP e acurácia, verificou-se que, para todos os trimestres, a inferência Bayesiana propiciou melhores estimativas da temperatura máxima em comparação com o método de MV. A distribuição *a priori* informativa, fundamentada nos dados de Lavras-MG, apresentou maior precisão nas predições de temperatura máxima do segundo e terceiro trimestres, e a distribuição *a priori* não informativa apresentou maior precisão para o primeiro e quarto trimestres da cidade de Divinópolis-MG.

Palavras-chave: distribuição generalizada de valores extremos; máxima verossimilhança; *priori*.

Bayesian modeling of maximum air temperature in Divinópolis-MG

ABSTRACT: This research aimed to model the behavior of the quarterly maximum temperature in the city of Divinópolis-MG by fitting the Generalized Extreme Value (GEV) distribution to a historical series of maximum temperatures using two distinct methods: Maximum Likelihood Estimation (MLE) and Bayesian Inference. Additionally, the maximum temperature return levels for the specified locality were calculated for each return period, assessing the accuracy and mean prediction error (MPE). For the calculation of return levels, both the MLE method and Bayesian approaches were utilized with different prior structures, considering informative priors (based on data from Belo Horizonte and Lavras) and non-informative priors, as well as the MLE method. Analysis of the MPE and accuracy results revealed that, for all quarters, Bayesian inference provided superior estimates of maximum temperature than the MLE method. Based on Lavras-MG data, The informative prior distribution exhibited higher precision in maximum temperature predictions for the second and third quarters. The non-informative prior distribution exhibited greater precision for the first and fourth quarters in Divinópolis-MG.

Keywords: generalized extreme value distribution; maximum likelihood; priors.

1. INTRODUÇÃO

Os efeitos do aquecimento global, como temperatura extrema, secas, enchentes e ondas de calor são sentidos em diferentes localidades do mundo, afetando diretamente os biomas e as condições de vida humana (MATHEW, 2022). A região de Divinópolis, localizada no centro-oeste de Minas Gerais, está igualmente sujeita a esses efeitos. A exposição prolongada da população a temperaturas extremas pode desencadear uma série de problemas de saúde, incluindo o aumento da ocorrência de casos de doenças respiratórias, doença renal, desidratação e problemas cardiovasculares (JUNG et al., 2021). Ademais, em períodos de calor intenso, é comum o aumento de casos de doenças transmitidas por mosquitos, como a dengue. Isto ocorre devido ao período reprodutivo do mosquito se tornar mais curto em climas

quentes, o que resulta em uma reprodução acelerada e favorece a proliferação desses transmissores (MONTEIRO; ARAÚJO, 2020).

As atividades agrícolas e pecuárias são fortemente afetadas em períodos de temperatura extrema. Em plantações de milho, as interações climáticas de maior influência sobre a cultura são a radiação solar, a precipitação e a temperatura do ar. A temperatura está diretamente relacionada a duração dos estados fenológicos do milho, que interfere na determinação da produtividade do grão (APARECIDO et al., 2020).

Outras culturas são diretamente afetadas mediante às condições de temperatura extrema, como o café, que quando suscetível a esse fenômeno climático, apresenta declínio em sua qualidade e produtividade (OLIVEIRA et al., 2018). Estima-se que os danos causados por diferentes desastres

meteorológicos, no estado de Minas Gerais desde 2008, tenha custado 12,8 bilhões de reais ao estado (FEAM, 2015).

Para minimizar os impactos negativos devido à ação de eventos climáticos extremos, pode-se realizar um planejamento baseado na modelagem da variável extremal. A modelagem permite que se tenha conhecimento do comportamento dessa variável e que se realize previsões que podem contribuir para o planejamento de ações (FERREIRA et al., 2021). Com respeito a eventos climáticos extremos, a previsão de ocorrência pode ser feita, dentre outros modos, por meio da distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV).

Diferentes métodos para estimação de parâmetros de uma distribuição são encontrados na literatura, sendo o método de Máxima Verossimilhança comumente aplicado (FERREIRA; LISKA, 2019; FERREIRA et al., 2021; MONTANHER; MINAKI, 2020). Entretanto, por esta metodologia ser fundamentado na teoria assintótica, não apresenta boas propriedades para estudos com tamanhos amostrais pequenos.

Uma forma para se contornar este problema, pode ser a utilização da Inferência Bayesiana, visto que esta abordagem permite a incorporação de informações *a priori*. A possibilidade de acrescentar informações em um modelo pode proporcionar menor incerteza sob os parâmetros, tornando esta abordagem adequada para situações com pequenos tamanhos amostrais (SCHOOT; MIOČEVIĆ, 2020).

Diante destes fatos, objetivou-se com o presente estudo, ajustar a distribuição GEV às séries trimestrais de temperatura máxima de Divinópolis, utilizando duas diferentes abordagens: Inferência Bayesiana e Máxima Verossimilhança. Objetivou-se também, calcular os níveis de retorno de temperatura máxima da referida localidade, para diferentes tempos de retorno, avaliando a acurácia e o erro médio de predição (EMP). Os níveis de retorno foram calculados a partir do método de Máxima Verossimilhança (MV) e de diferentes estruturas de *priori*, considerando distribuições *a priori* informativas e não informativas.

2. MATERIAL E MÉTODOS

O município de Divinópolis está localizado no centro-oeste de Minas Gerais, com coordenadas latitudinais de 20° 16' S e longitudinais de 44° 86' W. Conforme Reboita et al. (2015), Divinópolis abrange uma área de 708.115 km², com altitude média de 788,35 m em relação ao nível do mar. De acordo com a Classificação Climática de Köppen, o município se enquadra no clima Aw tropical, caracterizado por inverno de baixa pluviosidade e verão com maior incidência de chuvas, apresentando temperatura média anual de 21,5 °C (MIRANDA et al., 2017).

Os dados de temperatura diária em Grau Celsius (°C) da cidade de Divinópolis, referem-se aos anos de 1995 a 2019 e foram obtidos a partir do Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa (BDMEP) do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET).

A metodologia adotada para obtenção das séries de máximos foi a de Bloco Máximo, a qual consiste em dividir o período de observações em intervalos disjuntos, tomando a observação máxima de cada intervalo (Ferreira; Haan, 2015).

Os intervalos adotados foram os trimestres anuais, desses, foram selecionadas as temperaturas máximas

ocorridas em cada ano em análise, obtendo quatro séries de máximos.

Para o ajuste e avaliação dos modelos, cada série foi dividida em dois grupos. O primeiro, contendo dados de 1995 a 2009, foi utilizado para realizar o ajuste dos modelos. Por outro lado, o segundo conjunto de dados, correspondente ao período de 2010 a 2019, foi destinado à avaliação dos modelos, via cálculo da acurácia e erro médio de predição (EMP).

A partir do modelo mais adequado pôde-se calcular a temperatura máxima trimestral predita para os tempos de retorno de 2, 5, 20 e 50 anos e seus respectivos intervalos de credibilidade (Bayesiana) e confiança (MV).

Para realizar a modelagem dos dados, foi utilizada a distribuição GEV. Esta distribuição incorpora as três formas assintóticas de valores extremos (Gumbel, Fréchet e Weibull) em uma única expressão. A função densidade de probabilidade da distribuição GEV (Equação 1) é dada por:

$$f(x; \xi, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1+\xi}{\xi}} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (01)$$

em que: μ , σ e ξ , denotam, respectivamente, os parâmetros de posição, escala e forma.

Na distribuição GEV, o valor do parâmetro ξ determina a forma assintótica de valor extremo que será assumida. Quando $\xi > 0$, a GEV representa a distribuição do Tipo II (Fréchet), a qual é definida para $x > \mu - \sigma/\xi$.

Para valores do parâmetro forma inferiores a zero, a GEV assume a distribuição do Tipo III (Weibull), definida em $x < \mu - \sigma/\xi$. Para o caso em que o limite de $f(x)$, com ξ tendendo à zero, a GEV corresponde à distribuição do Tipo I (Gumbel) (Coles, 2001).

Para estimar os parâmetros da distribuição GEV, utilizou-se o método de MV assim como métodos de Inferência Bayesiana. O método de MV consiste em encontrar estimativas que maximizem a função de verossimilhança (Popkov, 2021). Entretanto, é necessário a pressuposição de que as observações das séries analisadas sejam independentes. Para verificar esta pressuposição, utilizou-se o teste de independência de Ljung-Box (Ljung; Box, 1978), ao nível de significância de 5%.

A função de verossimilhança é dada pela expressão (Equação 2).

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta), \quad (02)$$

em que: \mathbf{x} é o vetor de dados da série de máximos e θ o vetor de parâmetros da distribuição.

Desta forma, a função de verossimilhança para a distribuição GEV é dada por (Equação 3):

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma^n} \prod_{i=1}^n \left\{ \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1+\xi}{\xi}} \right\} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \right\} \quad (03)$$

Para verificar o ajuste da distribuição GEV às séries de valores máximos de temperatura de Divinópolis, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov, ao nível de significância de 5%. A utilização do teste Kolmogorov-Smirnov justifica-se por avaliar o grau de concordância entre a distribuição adotada e o conjunto de dados amostrais, que para este caso

são as séries de temperaturas máximas trimestrais do município de Divinópolis.

Conforme Blain et al. (2009), a presença de dados não aleatórios e tendências nas séries de valores máximos interfere na estrutura de probabilidade associada aos dados. Portanto, a análise desses fatores torna-se relevante para o estudo. Para avaliar estas pressuposições, foram utilizados o *Runs-test* (Wald; Wolfowitz, 1940), que verifica se há indícios de não aleatoriedade nas séries, e o teste de Mann-Kendall (Mann, 1945), utilizado para verificar a presença de tendências nas séries.

Para situações que requerem estudos de fenômenos que apresentam quantidade baixa e limitada de dados disponíveis para análise, a utilização da Inferência Bayesiana pode mostrar-se mais adequada em comparação com o método de MV ou demais técnicas frequentistas. Isto ocorre devido à capacidade da Inferência Bayesiana incorporar diferentes formas de informações *a priori* no modelo. Conforme He et al. (2021), esta capacidade pode gerar grandes impactos nos resultados da inferência, tornando-os mais confiável.

A Inferência Bayesiana fundamenta-se na utilização de informações dos dados amostrais e informações *a priori* para calcular a densidade *a posteriori* dos parâmetros. Portanto, necessita-se assumir uma distribuição *a priori* para os parâmetros da distribuição de interesse. Neste trabalho, adotou-se como distribuição *a priori* dos parâmetros da GEV a distribuição Normal Trivariada (Equação 4), proposta por Coles e Powell (1996), e dada por:

$$p(\boldsymbol{\theta}) \propto (2\pi)^{1/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\Phi})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\Phi}) \right\}, \quad (04)$$

em que: $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros da GEV e $\boldsymbol{\Sigma}$ e $\boldsymbol{\Phi}$ são os hiperparâmetros, respectivamente, o vetor de médias e a matriz de variâncias e covariâncias da distribuição Normal Trivariada (Equação 5), dados por:

$$\boldsymbol{\Phi} = (\mu_0, \log \sigma_0, \xi_0) \quad (05)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{VAR}(\mu_0) & \text{cov}(\log \sigma_0, \mu_0) & \text{cov}(\xi_0, \mu_0) \\ \text{cov}(\mu_0, \log \sigma_0) & \text{VAR}(\log \sigma_0) & \text{cov}(\xi_0, \log \sigma_0) \\ \text{cov}(\mu_0, \xi_0) & \text{cov}(\log \sigma_0, \xi_0) & \text{VAR}(\xi_0) \end{pmatrix}.$$

As informações para os hiperparâmetros foram obtidas ajustando a distribuição GEV aos dados de temperatura máxima de Lavras-MG e Belo Horizonte-MG. A escolha

desse município se justifica pelo fato de apresentarem características semelhantes à de Divinópolis, como clima, latitude e longitude. Sendo Lavras com latitude de 21°75'S, longitude de 45°00'W e altitude de 918 m e Belo Horizonte com latitude de 19°93'S, longitude de 43°93'W e altitude de 915 m (REBOITA et al., 2015).

Neste trabalho, foram utilizadas duas abordagens: *prioris* não informativas e *prioris* informativas. A *priori* não informativa expressa informações vagas ou gerais sobre os parâmetros de interesse, enquanto que a informativa expressa informações específicas e definidas (KAMARY; ROBERT, 2014).

Para *priori* não informativa (PNI) dos quatro trimestres analisados, definiu-se os seguintes hiperparâmetros: $\boldsymbol{\Phi}=(0, 0, 0)$ e $\boldsymbol{\Sigma}=(100000, 100000, 100)$. A escolha destes valores deu-se visando minimizar a influência das informações *a priori* no modelo, permitindo que os dados observados desempenhem maior influência. Desta forma, foram adotados valores que indicam alta variabilidade da *priori*, caracterizando uma distribuição não informativa que permite um amplo espaço paramétrico.

Os valores dos hiperparâmetros (Tabela 1), obtidos a partir dos dados de Lavras e Belo Horizonte, foram utilizados para a construção e calibração das *prioris* informativas. Desta forma, tem-se neste trabalho distribuições *a priori* informativas, para cada trimestre, fundamentadas nos dados de Lavras (PIL) e fundamentadas nos dados de Belo Horizonte (PIB).

Com o objetivo de refinar as informações fornecidas *a priori*, as matrizes de variância e covariância das PIL e PIB foram multiplicadas por 1 e 9, as quais foram denominadas respectivamente de PIL1, PIL9 e PIB1, PIB9.

A multiplicação por 1 mantém a dispersão original das *prioris* informativas. A multiplicação por 9 aumenta a dispersão das *prioris*, diminuindo a contribuição das informações *a priori* na distribuição *a posteriori*.

A obtenção das marginais dos parâmetros da GEV, através da integração da distribuição conjunta *a posteriori*, não pode ser obtida de forma analítica, conforme destacado por Jiang e Forssén (2022). Uma abordagem utilizada para contornar este problema é a utilização de técnicas de simulação, como a simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

Tabela 1. Valores dos hiperparâmetros obtidos via distribuição GEV ajustada aos dados de temperatura máxima (°C) dos municípios de Lavras e Belo Horizonte (BH), referente aos trimestres (Tri.) do período de 1995 a 2009.

Table 1. Hyperparameter values obtained through GEV distribution fitted to maximum temperature data (°C) for the cities of Lavras and Belo Horizonte (BH) for the quarters (Tri.) of the period from 1995 to 2009.

Cidade	Tri	$\boldsymbol{\Phi}$			$\boldsymbol{\Sigma}_{VAR}$			$\boldsymbol{\Sigma}_{cov}$		
		μ_0	σ_0	ξ_0	μ_0	σ_0	ξ_0	σ_0, μ_0	ξ_0, σ_0	ξ_0, μ_0
Lavras	1°	33,08	0,74	0,22	0,043	0,021	0,029	0,003	-0,014	-0,012
	2°	30,82	0,58	-0,15	0,030	0,017	0,069	0,008	-0,023	-0,021
	3°	32,75	0,92	0,03	0,078	0,045	0,071	0,029	-0,035	-0,025
	4°	33,26	1,33	-0,30	0,141	0,077	0,038	0,007	-0,031	-0,034
BH	1°	32,72	1,11	-0,19	0,100	0,051	0,043	0,014	-0,028	-0,025
	2°	30,61	0,58	-0,06	0,027	0,014	0,034	0,006	-0,011	-0,015
	3°	33,05	0,84	0,04	0,059	0,033	0,051	0,020	-0,023	-0,015
	4°	33,30	1,17	-0,23	0,126	0,078	0,082	0,030	-0,054	-0,056

No método via MCMC, são geradas densidades para cada parâmetro em interesse, necessitando avaliar a convergência das cadeias *a posteriori* geradas. Neste trabalho

foram utilizados três critérios para análise da convergência: Raftery e Lewis (Raftery; Lewis, 1992), Geweke (Geweke, 1991) e Heidelberg-Welch (Heidelberg; Welch, 1983).

O critério de Raftery-Lewis fornece o fator de dependência, que indica o acréscimo multiplicativo para iterações necessárias à convergência. Se o fator ultrapassar 5, sugere-se falta de convergência, indicando a necessidade de reparametrização do modelo. O critério de Geweke realiza um teste de hipótese para avaliar a igualdade de médias entre o início e o final da cadeia. Nesse procedimento, é calculada uma estatística normalizada e a convergência é avaliada ao verificar se o valor absoluto dessa estatística é menor do que 1,96. O critério de Heidelberger-Welch (H-W) emprega testes estatísticos para avaliar a hipótese nula de estacionariedade da amostra gerada, rejeitando-a se o valor-p do teste for inferior a 5%.

Para avaliar o desempenho do método considerando cenários distintos de distribuições *a priori*, analisou-se os níveis de retorno de temperatura máxima, para os tempos de retorno de 2, 4, 6, 8 e 10 anos. O nível de retorno, conforme definido por Naghettini e Pinto (2007), representa o inverso da probabilidade de ocorrência de um evento E. Dada a ocorrência do evento, o tempo de retorno T é o tempo médio necessário para que tal evento ocorra novamente em qualquer ano subsequente. Isto é, dado um evento máximo de magnitude x, o tempo de retorno é o tempo médio esperado para a recorrência desse evento. Neste estudo, os níveis de retorno referem-se às temperaturas máximas preditas para um determinado tempo de retorno e são obtidos por (Equação 6):

$$\hat{x}(T) = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\xi} \left\{ 1 - \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{-\xi} \right\} \quad (06)$$

O nível de retorno é calculado a partir das médias *a posteriori* dos parâmetros da distribuição GEV, quando utilizada a abordagem Bayesiana. Enquanto que para a abordagem frequentista via MV, o nível de retorno é calculado por meio das estimativas de MV dos parâmetros da GEV.

Após realizar testes preliminares para verificar se há indícios de não aleatoriedade, tendência e independência dos dados, e analisar a convergência das cadeias *a posteriori*, é essencial determinar o modelo mais apropriado para a modelagem. Para avaliar o desempenho dos modelos, foi calculado o EMP, dado por (Equação 7):

$$EMP = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{(o_i - \hat{o}_i)}{o_i} \right| \times 100 \quad (07)$$

em que: \hat{o}_i é a temperatura máxima predita para um determinado tempo de retorno e o_i é a temperatura máxima observada da série histórica para o mesmo tempo de retorno i .

Outro critério utilizado para avaliar o desempenho dos modelos foi a acurácia, a qual é avaliada observando se a temperatura máxima da série histórica para um determinado tempo de retorno em anos, pertence ao intervalo predito. Nos modelos ajustados via MV, utilizam-se intervalos de confiança, que representam o intervalo dentro do qual espera-se que a predição esteja contida, com uma certa probabilidade, neste caso, 95%.

Para os modelos ajustados via Inferência Bayesiana, o intervalo predito é o HPD (Highest Posterior Density), que é calculado a partir das distribuições *a posteriori* e representa o intervalo que contém a menor amplitude dentre todos os

possíveis intervalos de credibilidade (Castro *et al.*, 2022). Para este trabalho adotou-se o intervalo de 95% de credibilidade.

Todas as análises estatísticas presentes neste trabalho foram realizadas utilizando-se o software R (R Core Team, 2023).

3. RESULTADOS

As estatísticas descritivas dos dados de temperatura máxima trimestrais do período de janeiro de 1995 a dezembro de 2019 são apresentadas na Tabela 2. Observa-se que a média de temperatura máxima variou de 32,21 °C, registrada no segundo trimestre, a 35,34 °C, registrada no quarto trimestre. Ressalta-se que a média de temperatura máxima referente ao segundo trimestre, destacou-se dentre as demais médias, visto que obteve valor relativamente baixo em comparação com os demais trimestres.

Tabela 2. Estatísticas descritiva das temperaturas máximas em °C ocorridas nos trimestres (Tri) dos anos de 1995 a 2019 na cidade de Divinópolis-MG.

Table 2. Descriptive statistics of maximum temperatures in °C occurring in the quarters (Tri) from 1995 to 2019 in the city of Divinópolis-MG.

Tri	Média	Mediana	Máx	CV(%)	Q ₁	Q ₃
1º	35,0	34,8	37,0	2,6	34,3	35,1
2º	32,2	32,5	33,5	2,9	31,3	33,0
3º	35,0	35,1	37,4	4,1	33,9	35,9
4º	35,3	35,5	38,4	5,1	34,1	36,2

Nota: Coeficiente de variação (CV); Primeiro quartil (Q₁); Terceiro quartil (Q₃)

Ao analisar as métricas de tendência central, mediana e média, nas séries trimestrais de temperatura máxima em Divinópolis, evidencia-se que, nos trimestres dois, três e quatro, os valores das medianas superaram os das médias. Tal observação sugere assimetria à esquerda nas distribuições empíricas correspondentes. Em contrapartida, no primeiro trimestre, no qual a média é superior a mediana, sugere-se uma assimetria à direita na distribuição empírica dos dados dessa série.

Em relação aos valores máximos observados nas séries de máximos, verifica-se, assim como para as médias e medianas das séries, que a menor temperatura máxima ocorreu no segundo trimestre, registrando 33,5 °C, enquanto a máxima mais elevada foi observada no quarto trimestre, atingindo 38,4 °C.

Os resultados do coeficiente de variação revelam que a temperatura máxima no quarto trimestre apresentou a maior variabilidade, registrando 5,05%. Em contraste, a menor variabilidade foi observada no primeiro trimestre, com um coeficiente de variação de 2,57%. No que se refere aos quartis das séries de temperatura máxima, destaca-se que, no segundo trimestre, o valor que posiciona 75% dos dados abaixo do mesmo é de 33,0 °C, sendo este valor inferior ao do primeiro quartil do quarto trimestre, que registrou 34,1 °C, valor este que deixa 25% dos dados abaixo do mesmo.

Na Tabela 3 são apresentados os resultados dos testes de Ljung-Box, *Runs-test*, Mann-Kendall e Kolmogorov-Smirnov, todos ao nível de significância de 5%. Pode-se observar pelo teste de independência de Ljung-Box, que todas as séries de máximos são independentes. Pelo *Runs-test*, é possível concluir que não há indícios de não aleatoriedade nas séries e pelo teste de Mann-Kendall verifica-se que as séries são estacionárias. Desta forma, conclui-se que não há indícios de

presença de tendências nas séries trimestrais de temperatura máxima de Divinópolis.

Tabela 3. Resultados dos testes de Ljung-Box (LJ), *Runs-test* (RT), Mann-Kendall (MK) e Kolmogorov-Smirnov (KS), ao nível de significância de 5%, referentes aos dados de temperatura máxima em °C trimestral ocorridos nos anos de 1995 a 2019 na cidade de Divinópolis-MG.

Table 3. Results of Ljung-Box (LJ), *Runs-test* (RT), Mann-Kendall (MK), and Kolmogorov-Smirnov (KS) tests at a 5% significance level, referring to the quarterly maximum temperature data in °C from 1995 to 2019 in the city of Divinópolis-MG.

Tri	LJ	RT	MK	KSMV	KSPNI
1º	0,1849	0,3822	0,5249	0,9271	0,3855
2º	0,3749	0,3166	0,4109	0,5461	0,5251
3º	0,7586	0,2109	0,5022	0,9376	0,6356
4º	0,3588	0,0950	0,3581	0,8575	0,5857

Nota: KS aplicado usando GEV ajustada via Máxima Verossimilhança (KSMV); KS aplicado usando GEV ajustada via Inferência Bayesiana com *priori* não informativa (KSPNI)

Pelos resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov, verifica-se que a distribuição GEV se ajustou as séries de

temperatura máxima dos quatro trimestres em análise, visto que os valores-p foram superiores a 0,05.

Satisfeitas as pressuposições de que as séries de Divinópolis são independentes, aleatórias e que não há evidência de tendências, torna-se possível o ajuste da distribuição GEV via Inferência Bayesiana e MV aos dados de temperatura máxima de Divinópolis para cada série. Os resultados dos ajustes são apresentados na Tabela 4.

As informações referentes aos resultados dos critérios de convergência das cadeias *a posteriori* não foram incluídas no texto, dada a extensiva quantidade de detalhes que seria exigida para apresentar devidamente. Isto se deve, pois, cada critério foi utilizado para avaliar a convergência das cadeias dos três parâmetros da GEV, tendo o acréscimo de que foram utilizadas três estruturas de informações *a priori*, sendo estas a não informativa, PII e PIB, com duas distinções cada (matriz de variância e covariância multiplicada por 9 e 1), para cada trimestre. Porém, verificou-se que, para todas as estruturas de *priori* e todos os parâmetros, não há evidências de não convergência das cadeias *a posteriori*.

Tabela 4. Estimativas (Est.) dos parâmetros da distribuição GEV, referente as temperaturas máximas (em °C) trimestral da cidade de Divinópolis, obtidas via Inferência Bayesiana fundamentada nos dados de Lavras (PI_{L9} e PI_{L1}) e Belo Horizonte (PI_{B9} e PI_{B1}) e método de Máxima Verossimilhança (MV) e seus respectivos desvios padrões (Dp).

Table 4. Estimates (Est.) of the parameters of the GEV distribution for the quarterly maximum temperatures (in °C) in the city of Divinópolis, obtained via Bayesian Inference based on data from Lavras (PI_{L9} and PI_{L1}) and Belo Horizonte (PI_{B9} and PI_{B1}) and the Maximum Likelihood method (MV) along with their respective standard deviations (Dp).

Método	Par.	1º Trimestre		2º Trimestre		3º Trimestre		4º Trimestre	
		Est.	Dp	Est.	Dp	Est.	Dp	Est.	Dp
MV	μ	34,31	0,23	32,23	*	34,23	0,33	34,67	0,41
	σ	0,67	0,16	1,26	*	0,81	0,23	1,32	0,32
	ξ	0,01	0,24	-0,99	*	0,28	0,36	-0,26	0,28
PNI	μ	34,29	0,25	32,01	0,45	34,27	0,34	34,58	0,45
	σ	0,81	0,24	1,41	0,30	1,04	0,40	1,48	0,41
	ξ	0,28	0,49	-0,80	0,47	0,27	0,39	-0,13	0,31
PI _{L9}	μ	34,03	0,33	31,99	0,46	33,90	0,41	34,41	0,42
	σ	1,17	0,39	1,46	0,67	1,57	0,60	1,58	0,44
	ξ	-0,12	0,27	-0,81	0,48	-0,04	0,38	-0,18	0,26
PI _{L1}	μ	33,24	0,19	31,52	0,33	32,97	0,23	33,61	0,33
	σ	2,00	0,26	1,56	0,43	2,51	0,40	2,55	0,52
	ξ	-0,33	0,15	-0,61	0,38	-0,28	0,21	-0,29	0,16
PI _{B9}	μ	34,16	0,31	31,28	0,33	32,96	0,37	34,36	0,36
	σ	1,03	0,36	1,88	0,47	1,50	0,53	1,46	0,38
	ξ	-0,02	0,28	-0,67	0,33	-0,02	0,36	-0,11	0,26
PI _{B1}	μ	32,98	0,27	30,74	0,15	33,21	0,20	33,60	0,28
	σ	2,49	0,43	1,82	0,19	2,22	0,32	2,46	0,48
	ξ	-0,34	0,18	-0,27	0,18	-0,19	0,19	-0,33	0,21

Nota: Estimadores de MV não regulares (*).

Tabela 5. Resultados do erro médio de predição (EMP) e acurácia (Acu) da temperatura máxima trimestral (°C) predita para os tempos de retorno de 2, 4, 6, 8 e 10 anos, para a cidade de Divinópolis-MG, via método de Máxima Verossimilhança (MV) e Inferência Bayesiana fundamentada nos dados de Lavras (PI_{L9} e PI_{L1}) e Belo Horizonte (PI_{B9} e PI_{B1}).

Table 5. Results of mean prediction error (EMP) and accuracy (Acu) for the predicted quarterly maximum temperature (°C) for return periods of 2, 4, 6, 8, and 10 years, for the city of Divinópolis-MG, using the Maximum Likelihood method (MV) and Bayesian Inference based on data from Lavras (PI_{L9} and PI_{L1}) and Belo Horizonte (PI_{B9} and PI_{B1}).

Tri.	PNI		PI _{L9}		PI _{L1}		PI _{B9}		PI _{B1}		MV	
	EMP	Acu	EMP	Acu	EMP	Acu	EMP	Acu	EMP	Acu	EMP	Acu
1º	0,94	4	1,16	4	1,51	4	1,06	4	1,44	4	1,84	3
2º	0,82	4	0,69	5	0,70	5	0,78	4	1,32	4	*	*
3º	1,39	5	1,01	4	1,55	4	1,07	4	1,39	4	1,69	4
4º	2,24	4	2,70	4	2,35	3	2,94	5	2,86	3	3,22	2
Média	1,35	4,25	1,39	4,25	1,52	4	1,46	4,25	1,75	3,75	2,25	3

Nota: Trimestres (Tri.); Estimadores de MV não regulares (*).

Após verificar a análise de convergência das cadeias *a posteriori* dos parâmetros, procedeu-se ao cálculo dos níveis de retorno para cada trimestre, referente aos tempos de retorno de 2, 4, 6, 8 e 10 anos, utilizando as abordagens de Inferência Bayesiana e MV. Os resultados desses cálculos foram utilizados para determinar EMP, conforme apresentado na Tabela 5.

Para cada nível de retorno, foram calculados os Intervalos de Credibilidade (HPD95%) e Intervalos de Confiança (IC95%) para os valores preditos em cada tempo de retorno. Dessa forma, a acurácia foi avaliada verificando se os valores calculados de temperatura máxima para cada nível de retorno estão contidos nos respectivos intervalos. Para a tomada de decisão da metodologia mais adequada para estimar a temperatura máxima trimestral, foi utilizado como critério principal o EMP e secundário a acurácia.

Analisando os resultados apresentados na Tabela 5, nota-se que, referente ao primeiro trimestre, a abordagem Bayesiana apresentou menor EMP. Destaca-se a *priori* não informativa, que propiciou um erro de predição inferior a 1%. Ressalta-se que, para todas as estruturas de *priori*, a Inferência Bayesiana obteve maior acurácia nas predições, com 4 acertos, um a mais do que com a MV. Este resultado pode ser explicado devido as estimativas do parâmetro de escala da GEV serem mais elevadas quando utilizada a abordagem Bayesiana.

Referente ao segundo trimestre, observa-se que, o menor erro e a maior acurácia ocorreu ao utilizar a abordagem Bayesiana com *priori* fundamentada nos dados de Lavras (PIL9) com 0,69% e 5 acertos, respectivamente. Portanto, pode-se afirmar que, com este modelo, foi possível obter as predições mais precisas e acuradas para os níveis de retorno do segundo trimestre. A mesma conclusão se aplica ao terceiro trimestre, pois o EMP das predições com PIL9 foi o mais baixo, e este foi adotado como critério decisivo, embora a acurácia das predições com *priori* não informativa tenha sido superior.

Quanto aos resultados referentes ao quarto trimestre, o modelo que se mostrou mais adequado para realizar as predições foi o ajustado via Inferência Bayesiana com *priori* não informativa. Destaca-se que os erros obtidos a partir de todas as metodologias foram superiores no quarto trimestre em comparação com os demais. Este resultado pode ser justificado por conta do coeficiente de variação da temperatura máxima dos valores observados do quarto trimestre ser mais elevado em relação aos demais, conforme apresentado na Tabela 1.

Verificado os modelos mais adequados para a modelagem da temperatura máxima de cada trimestre, o interesse torna-se a predição da variável também para altos tempos de retorno.

Desta forma, calculou-se a temperatura máxima trimestral predita para os tempos de retorno de 2, 5, 20 e 50 anos da cidade de Divinópolis via Inferência Bayesiana, utilizando os modelos com *priori* não informativa e *priori* informativa de Lavras (PIL9). Os resultados das predições são apresentados na Tabela 6.

Os resultados apresentados na Tabela 6 destacam que os menores valores temperatura máxima esperada foram registrados no segundo trimestre, para todos os tempos de retorno. Em contraste, para o quarto trimestre foram preditas as temperaturas mais elevadas para todos os trimestres e tempos de retorno.

Tabela 6. Temperatura máxima (°C) trimestral predita da cidade de Divinópolis-MG, obtidas via Inferência Bayesiana (PNI e PIL9) para os tempos de retorno (TR) de 2, 5, 20 e 50 anos, além do intervalo de credibilidade HPD (95%).

Table 6. Predicted quarterly maximum temperature (°C) for the city of Divinópolis-MG, obtained via Bayesian Inference (PNI and PIL9) for return periods (TR) of 2, 5, 20, and 50 years, along with the 95% HPD credibility interval.

Trimestres	Priori	TR	Predição	HPD (95%)
1°	PNI	2	34,9	[34,4; 35,3]
		5	35,8	[35,2; 36,4]
		20	37,0	[35,9; 38,5]
		50	37,8	[36,3; 40,5]
2°	PIL9	2	32,0	[31,4; 32,4]
		5	33,0	[32,6; 33,4]
		20	33,8	[33,3; 34,5]
		50	34,2	[33,4; 34,9]
3°	PIL9	2	34,6	[33,9; 35,3]
		5	36,2	[35,5; 36,8]
		20	37,3	[36,6; 38,3]
		50	37,8	[37,0; 39,0]
4°	PNI	2	35,4	[34,6; 36,3]
		5	37,0	[36,2; 37,8]
		20	38,3	[37,3; 39,4]
		50	38,8	[37,8; 40,5]

4. DISCUSSÃO

Ao comparar-se a média de temperatura do segundo trimestre com a média do quarto trimestre, sendo este com a média mais elevada (35,34 °C), verifica-se uma diferença de 3,13 °C (Tabela 2). Ferreira et al. (2024) verificaram resultados semelhantes para média da temperatura máxima mensal em Lavras-MG, município próximo à Divinópolis (123 Km em linha reta). Neste trabalho, os autores observaram que a menor média de temperatura ocorreu no segundo trimestre (junho) e a mais elevada no quarto trimestre (outubro).

A ausência de tendência em séries de máximos de temperatura foi observada também por Hassen (2021). Utilizando os testes de Mann-Kendall, Kwiatkowski Phillips e Schmidt e Shin (KPSS), os autores não constataram presença de tendências significativas nas séries de temperatura máxima de Jijel, Argélia.

Este aspecto das séries pode ser explicada pelo fato de estarmos adotando a metodologia de máximos em bloco, que pode ser mais suscetível a variações extremas pontuais que mascaram tendências de longo prazo. Entretanto, é possível que haja tendência nas séries de máximos e uma vez que detectadas, pode ser implementada no modelo, incorporando a tendência no parâmetro de posição (AGUIRRE et al., 2020).

Conforme os resultados apresentados na Tabela 4, observa-se que com o ajuste da distribuição GEV aos dados da série do segundo trimestre, utilizando o método de MV, obteve-se uma estimativa de -0,99 para o parâmetro de forma da distribuição. De acordo com Smith (1985), quando a estimativa de MV do parâmetro de forma é inferior a $-1/2$, as condições de regularidade para os estimadores existem, contudo, podem não ser regulares. Conforme Kyojo et al. (2024), a estimativa de MV é confiável se $\xi > -1/2$, caso contrário sua consistência diminui.

A abordagem Bayesiana oferece vantagens para estas circunstâncias, uma vez que não depende de suposições de

regularidade, as quais são necessárias em métodos fundamentados em teorias assintóticas, como a Máxima Verossimilhança (COLES, 2001).

As métricas de avaliação dos modelos de predição fornecem os resultados necessários para se ter o conhecimento do modelo mais adequado para a análise. Diferentes trabalhos utilizaram o EMP e acurácia para avaliação de modelos na Teoria de Valores Extremos (COSTA et al., 2019; BRANCO et al., 2022; MARTINS et al., 2018).

Verifica-se na Tabela 4 que, em média, para todos os trimestres analisados, as predições obtidas via abordagem Bayesiana apresentaram menores erros e maior acurácia do que as predições obtidas dos modelos ajustados via MV. A maior acurácia na modelagem Bayesiana da GEV foi observada também por Lazoglou et al. (2019), que realizaram uma análise de temperatura máxima de estações da região Mediterrânea utilizando para o ajuste dos modelos os métodos de MV, Inferência Bayesiana e Momentos L.

Quanto aos resultados referentes ao primeiro trimestre, apresentados na Tabela 6, pode-se concluir que em um tempo médio de 50 anos, espera-se uma ocorrência de temperatura igual ou superior a 37,78 °C e há 95% de credibilidade que a temperatura máxima do referido trimestre esteja entre 36,3 e 40,5 °C. Resultado semelhante foi observado no estudo de Aguirre et al. (2020), que ao modelarem a temperatura máxima de Piracicaba-SP via abordagem Bayesiana, verificaram que as temperaturas máximas esperadas para os meses de janeiro, fevereiro e março, para o tempo de retorno de 50 anos foram próximas a 37 °C.

A qualidade superior da abordagem Bayesiana com PIL, em comparação com PIB, pode ser elucidada considerando aspectos climáticos específicos do estado de Minas Gerais. Conforme evidenciado por Reboita et al. (2015), as menores médias de temperatura mínima e máxima são observadas na região sul do estado, devido à maior latitude e elevação topográfica nessa região. Adicionalmente, a influência significativa do fenômeno das "ilhas de calor" nas regiões metropolitanas, como Belo Horizonte, impacta consideravelmente o clima local (BLAIN et al., 2009). Tais características climáticas podem justificar a maior eficácia da abordagem Bayesiana quando se utiliza PIL.

5. CONCLUSÕES

As séries de temperaturas máximas trimestrais são independentes e não apresentam tendências. A distribuição GEV se ajustou a todas as séries de temperatura máxima da cidade de Divinópolis-MG. As cadeias *a posteriori* geradas via *priori* informativa e não informativa não apresentaram problemas quanto a convergência.

O ajuste do modelo para a série de máximos do segundo trimestre, utilizando o método de MV apresentou problema de identificabilidade, devido a estimativa obtida do parâmetro de forma, que foi inferior a -0,5.

Os resultados do erro médio de predição e acurácia evidenciaram que para todos os trimestres a Inferência Bayesiana propiciou melhores predições de temperatura máxima para o município de Divinópolis-MG em comparação com o método de MV.

A distribuição GEV com *priori* informativa fundamentada nos dados de Lavras (PIL9), apresentou maior adequabilidade para a modelagem da temperatura máxima

referente ao segundo e terceiro trimestre da cidade de Divinópolis-MG, enquanto para o primeiro e quarto trimestres os modelos com *priori* não informativa mostraram-se mais adequados.

6. REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, A. F. L.; NOGUEIRA, D. A.; BEIJO, L. A. Análise da temperatura máxima de Piracicaba (SP) via distribuição GEV não estacionária: uma abordagem bayesiana. **Revista Brasileira de Climatologia**, v. 27, p. 496-517, 2020. <http://dx.doi.org/10.5380/abclima.v27-i0.73763>
- APARECIDO, L. E. de O.; TORSONI, G. B.; MESQUITA, D. Z.; MENESES, K. C. de; MORAES, J. R. D. S. C. de. Modelagem da produtividade do milho safrinha em função das condições climáticas do Mato Grosso do Sul. **Revista Brasileira de Climatologia**, v. 26, p. 155-174, 2020. <http://dx.doi.org/10.5380/abclima.v26i0.6-9183>
- BLAIN, G. C.; PICOLI, M. C. A.; LULU, J. Análises estatísticas das tendências de elevação nas séries anuais de temperatura mínima do ar no Estado de São Paulo. **Bragantia**, v. 68, n. 3, p. 807-815, 2009. <https://doi.org/10.1590/S00068705-2009000300030>
- BRANCO, K. P.; DE OLIVEIRA, A. D. C.; BEIJO, L. A. Predição da precipitação máxima de Manhuaçu-MG via abordagem bayesiana. **Pensar Acadêmico**, v. 20, n. 2, p. 452-469, 2022. <https://doi.org/10.21576/pa.2022v20i2.3418>
- COLES, S. **An introduction to statistical modeling of extreme values**. London: Springer, 2001. 208p. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4471-3675-0>
- COLES, S. G.; POWELL, E. A. Bayesian methods in extreme value modelling: a review and new developments. **International Statistical Review**, v. 64, n. 1, p. 119-136, 1996. <https://doi.org/10.3307/1403426>
- CASTRO, T. de P.; PAULINO, C. D.; SINGER, J. M. A fair comparison of credible and confidence intervals: an example with binomial proportions. **Metron**, v. 80, n. 3, p. 371-382, 2022. <https://doi.org/10.1007/s40300-02100225-6>
- COSTA, M. S.; BEIJO, L. A.; AVELAR, F. G. Comparação de distribuições de probabilidades na previsão de vazões máximas do reservatório de Furnas. **Revista Brasileira de Agricultura Irrigada**, v. 13, n. 1, 3190-3202, 2019. <https://doi.org/10.7127/rbai.-v13n100893>
- FEAM_Fundação Estadual do Meio Ambiente. **Plano de energia e mudanças climáticas de minas gerais: Sumário executivo**. Belo Horizonte: FEAM, 2015. 49 p. Disponível em: <https://sistemas.meio-ambiente.mg.gov.br/reunioes/uploads/T8a10n47WuW/W9IIIFuxojZRFpfjgarTQ4.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2023
- FERREIRA, A.; HAAN, L. On the Block Maxima Method in Extreme Value Theory: PWM Estimators. **The Annals of Statistics**, v. 43, n. 1, p. 276-298, 2015. <https://doi.org/10.1214/14-AOS1280>
- FERREIRA, R. V. de C.; LISKA, G. R. Análise probabilística da temperatura máxima em Uruguaiana, RS. **Revista Brasileira de Agricultura Irrigada**, v. 13, p. 3390-3401, 2019. <http://dx.doi.org/10.7127/-RBAI.V13N301007>
- FERREIRA, T. R.; BEIJO, L. A.; AVELAR, F. G. Avaliação de distribuições de probabilidades no estudo de precipitação pluvial máxima de cidades de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Climatologia**, v. 29, p. 526-544, 2021. <http://dx.doi.org/10.5380/rbclima.v29i0.709-50>

- FERREIRA, V. de P. M.; AVELAR, F. G.; BEIJO, L. A.; REIS, C. J. dos. Predição da temperatura máxima de Lavras-MG: comparação da normal climatológica com a teoria de valores extremos. **Observatório de La Economía Latinoamericana**, v. 22, n. 5, e4896, 2024. <https://doi.org/10.55905/oelv22n5-187>
- GEWKE, J. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculations of posterior moments. **Bayesian statistics**, v. 4, p. 641-649, 1991. <https://doi.org/10.210-34/sr.148>
- HEIDELBERGER, P.; WELCH, P. D. Simulation run length control in the presence of an initial transient. **Operations Research**, v. 31, n. 6, p. 1109-1144, 1983. <https://doi.org/10.1287/opre.31.6.1109>
- HASSEN, C. A bayesian analysis of the annual maximum temperature using generalized extreme value distribution. **Mausam**, v. 72, n. 3, p. 607-618, 2021. <https://doi.org/10.54302/-mausam.v72i3.1310>
- HE, J.; WANG, W.; HUANG, M.; WANG, S.; GUAN, X. Bayesian inference under small sample sizes using general noninformative priors. **Mathematics**, v. 9, n. 21, p. 1-20, 2021. <https://doi.org/10.3390/math9212810>
- JIANG, W.; FORSSÉN, C. Bayesian probability updates using sampling/importance resampling: Applications in nuclear theory. **Frontiers in Physics**, v. 10, p. 1-10, 2022. <https://doi.org/10.3389/fphy.2022.1058809>
- JUNG, J.; UEJIO, C. K.; KINTZIGER, K. W.; DUCLOS, C.; REID, K.; JORDAN, M.; SPECTOR, J. T. Heat illness data strengthens vulnerability maps. **BMC Public Health**, v. 21, p. 1-13, 2021. <https://doi.org/10.1186/s12889-021-12097-6>
- KAMARY, K.; ROBERT, C. P. Reflecting about selecting noninformative priors. **ArXiv**, v. 1, p. 1-15, 2014. <https://doi.org/10.48550/arXiv.14-02.6257>
- KYOJO, E. A.; MIRAU, S. S.; OSIMA, S. E.; MASANJA, V. G. Frequentist and Bayesian approaches in modeling and prediction of extreme rainfall series: a case study from Southern Highlands Region of Tanzania. **Advances in Meteorology**, v. 2024, n. 1, p. 1-17, 2024. <https://doi.org/10.1155/2024/8533930>
- LAZOGLU, G.; ANAGNOSTOPOULOU, C.; TOLIKA, K.; KOLYVA-MACHERA, F. A review of statistical methods to analyze extreme precipitation and temperature events in the Mediterranean region. **Theoretical and Applied Climatology**, v. 136, p. 99-117, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00704-018-2467-8>
- LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika**, v. 65, n. 2, p. 297-303, 1978. <https://doi.org/10.1093/biomet/65.2.297>
- MANN, H. B. Nonparametric Tests Against Trend. **Econometrica**, v. 13, n. 3, p. 245-259, 1945. <https://doi.org/10.2307/-1907187>
- MATHEW, M. D. Nuclear energy: A pathway towards mitigation of global warming. **Progress in Nuclear Energy**, v. 143, p. 1-9, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2021.104080>
- MARTINS, T. B.; ALMEIDA, G. C.; AVELAR, F. G.; BEIJO, L. A. Predição da precipitação máxima no município de Silvanópolis-MG: Abordagens clássica e bayesiana. **Irriga**, n. 23, v. 3, p. 467-479, 2018. <https://doi.org/10.15809/irriga.2018v2-3n3p467-479>
- MIRANDA, C. T. da S.; THEBALDI, M. S.; ROCHA, G. M. R. B. Precipitação máxima diária anual e estimativa da equação de chuvas intensas do município de Divinópolis, MG, Brasil. **Scientia Agraria**, v. 18, n. 4, p. 9-16, 2017. <http://dx.doi.org/10.5380/rsa.v18i4.49883>
- MONTANHER, O. C.; MINAKI, C. Precipitação em Maringá-PR: estatísticas descritivas, tendência de longo prazo e probabilidade de eventos extremos diários. **Revista do Departamento de Geografia**, v. 39, p. 138-153, 2020. <https://doi.org/10.116-06/rdg.v3-9i0.164209>
- MONTEIRO, V. B.; ARAÚJO, J. A. Aspectos socioeconômicos e climáticos que impactam a ocorrência de dengue no Brasil: análise municipal de 2008 a 2011 por regressões quantílicas para dados em painel. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 5, p. 28126-28145, 2020. <https://doi.org/10.34117/bjdv6n5-311>
- OLIVEIRA, A. S. de; PEREIRA, G. A.; RODRIGUES, A. F.; MELO NETO, J. de O. Tendências em índices extremos de precipitação e temperatura do ar na cidade de Uberaba, MG. **Sustentare**, v. 2, n. 1, p. 118-134, 2018. <http://dx.doi.org/10.5892/st.v2i1.4943>
- POPKOV, A. Y. Randomized machine learning of nonlinear models with application to forecasting the development of an epidemic process. **Automation and Remote Control**, v. 86, n. 6, p. 1049-1064, 2021. <https://doi.org/10.1134/S0005117921060060>
- R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 15 nov. 2023.
- RAFTERY A. E.; LEWIS S. Comment: one long run with diagnostics: implementation strategies for Markov chain monte carlo. **Statistical Science**, v. 7, n. 4, p. 493-497, 1992. <https://doi.org/10.1214/ss/1177011143>
- REBOITA, M. S.; RODRIGUES, M.; SILVA, L. F.; ALVES, M. A. Aspectos climáticos do estado de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Climatologia**, v. 17, p. 206-226, 2015. <http://doi.org/10.5380/abclima.v17i0.41493>
- SMITH, R. L. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. **Biometrika**, v. 72, n. 1, p. 67-90, 1985. <https://doi.org/10.1-093/biomet/72.1.67>
- Van de SCHOOT, R.; MIOČEVIĆ, M. **Small sample size solutions**. London: Taylor & Francis, 2020. 284p. <https://doi.org/10.4324/9780429273872>
- WALD, A.; WOLFOWITZ, J. On a test whether two samples are from the same population. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 11, n. 2, p. 147-162, 1940. <https://doi.org/10.1214/aoms/11-77731909>

Agradecimentos: Agradecimentos ao INMET e ANA pelo fornecimento do conjunto de dados desta pesquisa e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de mestrado que apoiou este estudo. Este trabalho foi financiado pelo Centro de Ciências Agrárias da UFSCar (CCA) - projeto FAI RTI-CCA.

Contribuição dos autores: T.R.F. - conceituação, metodologia, investigação ou coleta de dados, análise estatística, validação, redação (original), e redação (revisão e edição); L.A.B. - conceituação, metodologia, administração ou supervisão e redação (revisão e edição); G.R.L. - aquisição de financiamento, conceituação, metodologia e redação (revisão e edição); G.B.G. - redação (revisão e edição). Todos os autores leram e concordaram com a versão publicada do manuscrito.

Disponibilidade de dados: Os dados desta pesquisa poderão ser obtidos mediante solicitação ao autor correspondente via e-mail.

Conflito de interesses: Os autores declaram não haver conflito de interesses.