

# Projeto Ótimo de Pilares Esbeltos de Concreto Armado

## Optimum Desing of Reinforced Concrete Slenders Coluns

<sup>1</sup>Élcio Cassimiro Alves; <sup>2</sup>Paula Mayer dos Santos Souza; <sup>3</sup>Paulo Vitor Calmon Nogueira da Gama

<sup>1</sup> Professor Doutor, Departamento de Engenharia Civil – Universidade Federal do Espírito Santo

<sup>2</sup> Mestranda em Engenharia Civil – Universidade Federal do Espírito Santo

<sup>3</sup> Mestre em Engenharia de Estruturas – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, CEP: 29075-910, Vitória, ES, Brasil

---

**RESUMO:** O presente trabalho tem como objetivo apresentar a formulação e aplicação do problema de otimização para o dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado de alta resistência. Para a formulação do problema de otimização foi considerada a formulação do pilar-padrão melhorado, com a curvatura da seção crítica obtida pelos diagramas de interação momento-força normal-curvatura (M, N,  $1/r$ ), levando em consideração desta forma a fluência no concreto. Para o desenvolvimento do programa foi utilizado a plataforma do Matlab e a solução do problema de otimização foi obtida via Método dos Pontos Interiores. Exemplos numéricos são apresentados para mostrar a aplicação do problema de otimização e o software TQS foi utilizado para comparar os resultados obtidos para os efeitos de segunda ordem. De acordo com os resultados, uma solução melhorada pode ser obtida em relação ao problema inicial, principalmente quando se tem limitação no lançamento de alguma geometria do pilar.

**Palavras-chave:** Dimensionamento. Pilares esbeltos. Otimização. Concreto de alta resistência.

**ABSTRACT:** The present work aims to present the formulation and application of the optimization problem for the design of slender columns of reinforced concrete of high resistance. For the formulation of the optimization problem will be considered the formulation of the improved standard column, with the curvature of the critical section obtained by the moment-force-normal-curvature interaction diagrams (M, N,  $1/r$ ), taking into account in this way the creep in concrete. For the development of the program will be used the platform of Matlab and the optimization problem solution will be obtained by Interior Points Method. Numerical examples are presented to show the application of the optimization problem and the TQS software will be used to compare the results obtained for the second order effects. According to the results, an improved solution can be obtained in relation to the initial problem, especially when there is a limitation in the launch of some abutment geometry.

**Keywords:** Design. Slender columns. Optimization. High strenght concrete

---

## 1. INTRODUÇÃO

Pilares são os elementos responsáveis pela transmissão das cargas dos pavimentos para as fundações. Em geral estão submetidos a esforços de compressão acrescidos de momentos fletores, logo, são dimensionados à flexo-compressão normal ou à flexo-compressão oblíqua.

O dimensionamento de pilares esbeltos vem sendo estudado nos últimos anos, como, por exemplo em FRANCO (2010) estuda o efeito de segunda ordem no dimensionamento de pilares esbeltos e CARDOSO JÚNIOR (2014) apresenta um estudo considerando uma análise linear para o dimensionamento de pilares de concreto armado. Por outro lado, estudos desenvolvidos por SIAS e ALVES (2014) e SIAS e ALVES (2015) estudam o problema de otimização para pilares com esbeltez menor que 90 e concreto com resistência até 50MPa e SOUZA e ALVES (2016) abordam o projeto otimizado de pilares de concreto armado considerando concreto de alta resistência. PIRES e SILVA (2014), entretanto, reuniram os dois temas, abordando o dimensionamento otimizado de pilares esbeltos, porém não levando em consideração a resistência do concreto que é, ainda, um assunto pouco explorado para concretos de até 50MPa.

O dimensionamento estrutural, inclusive com o uso de softwares comerciais, ainda é feito na base da tentativa e erro, ou seja, o calculista lança a dimensão do pilar a partir de um pré-dimensionamento ou não, verificando posteriormente se esta atende ou não aos esforços solicitantes. Caso não atenda, o redimensionamento desta seção é feito até que o mesmo atenda aos critérios estabelecidos pela ABNT NBR 6118:2014. As ferramentas de otimização permitem fazer com que o dimensionamento das seções de concreto e aço seja feito de forma automáticas.

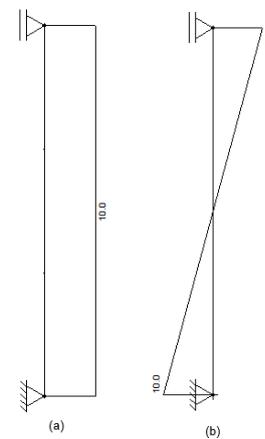
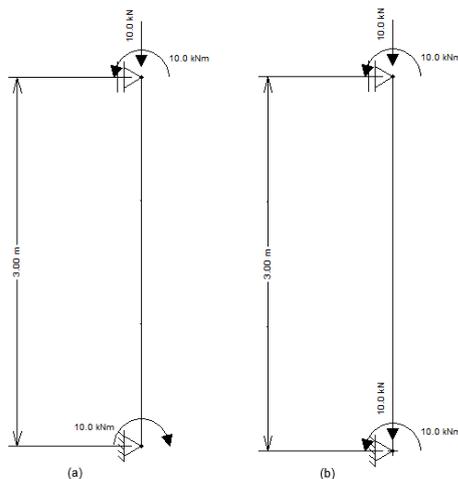
Tendo em vista estudos escassos na área de otimização envolvendo pilares com esbeltez entre 90 e 140 levando em consideração concreto de alta resistência, o presente trabalho se justifica no preenchimento desta lacuna.

Objetiva-se neste trabalho apresentar a formulação do problema de otimização bem como a aplicação do problema para pilares com esbeltez entre 90 e 140 levando em consideração concretos com resistência entre 20MPa e 90MPa. Diagramas de interação momento-força normal-curvatura (M, N, 1/r) serão implementados para levar em consideração o efeito de segunda ordem, bem como o efeito da fluência. O problema de otimização foi definido e implementado dentro da plataforma do *Matlab* e, para a solução do mesmo, foi utilizado o método dos pontos interiores.

Na Figura 1 são mostrados dois modelos de esforços atuantes nos pilares. O primeiro (Figura 1-a) se aproxima do caso tratado em ensaios experimentais, nos quais tem-se momento fletor de mesma intensidade, porém atuando em sentidos contrários em cada uma das extremidades do pilar, fornecendo um diagrama de momento fletor constante, conforme mostrado na Figura 2-a. O modelo mostrado na Figura 1-b, representa mais fielmente a realidade encontrada nos edifícios, nos quais o momento atuante no pilar possui o mesmo sentido em ambos os pavimentos. O diagrama de momento fletor para este modelo é linear e pode ser visto na Figura 2-b. Neste artigo, foi considerado o modelo “b” de carregamento, por se tratar do modelo mais próximo da realidade.

Figura 1 – Modelo de esforços atuantes nos pilares

Figura 2 – Diagramas de momentos fletores para os modelos definidos na Figura 1.



## 2 Dimensionamento de Pilares esbeltos de concreto armado

### 2.1 Conceituação e Procedimentos de Cálculo

Os pilares são classificados, na literatura, de acordo com o índice de esbeltez ( $\lambda$ ). Índices abaixo do limite, definido pela ABNT NBR 6118:2014, caracterizam os pilares curtos. Índices inferiores a 90 e superiores ao índice limite referem-se aos pilares medianamente esbeltos. Pilares com esbeltez entre 90 e 140 são denominados esbeltos, e, acima de 140 tem-se os pilares muito esbeltos. Além disso, a norma não admite pilares com índice de esbeltez superior a 200.

O índice de esbeltez é calculado em função da geometria, do comprimento equivalente do elemento comprimido ( $l_e$ ) e das condições de extremidade do pilar, e deve ser definido para cada direção principal e central de inércia, por:

$$\lambda_x = l_{e,x} / i_y \text{ e } \lambda_y = l_{e,y} / i_x \quad (1)$$

em que  $i$  é o raio de giração em x ( $i_x$ ) e em y ( $i_y$ ) definidos pela raiz quadrada da razão entre o momento de inércia ( $I_x$  ou  $I_y$ ) e a área da seção transversal ( $A_c$ ), conforme:

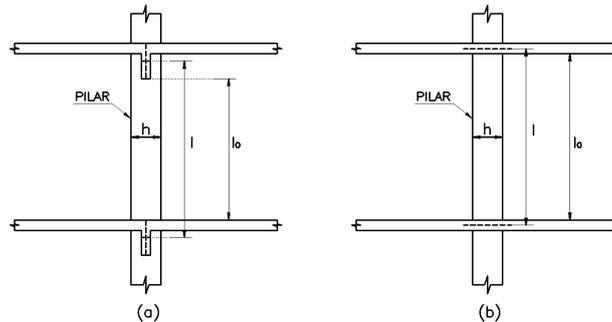
$$i_y = \sqrt{I_y/A_c} \text{ e } i_x = \sqrt{I_x/A_c} \quad (2)$$

segundo a ABNT NBR 6118:2014, o comprimento equivalente ( $l_e$ ) de um elemento comprimido suposto vinculado em ambas as extremidades é:

$$l_e = \text{mínimo}(l_0 + h; l) \quad (3)$$

sendo  $l_0$  a distância entre as faces internas dos elementos que vinculam o pilar,  $h$  a altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo, e  $l$  a distância entre eixos dos elementos que vinculam o pilar. Na Figura 3 é esclarecido essas definições apresentadas nas Equações de 1 a 3. Na Figura 3-a tem-se um pilar vinculado por vigas e na Figura 3-b um pilar vinculado por lajes.

Figura 1 - Definição do comprimento equivalente de um elemento comprimido



Fonte: Carvalho e Pinheiro (2009) com adaptações feitas pelos autores

Assim, desenvolveu-se o Quadro 1 com as dimensões máximas, em ao menos uma direção de pilares retangulares, para que se tenha um pilar esbelto de acordo com o comprimento equivalente do elemento comprimido ( $l_e$ ). Por meio do Quadro 1, pode-se concluir que, a situação mais usual de pilar esbelto ocorre para pilares de 20cm submetidos a pés-direitos duplos, considerando-se neste caso aproximadamente 6m para o  $l_e$ . Além desta situação, pilares esbeltos ocorrem apenas em casos específicos de pilares com alturas livres muito grandes e podem ser evitados adotando-se dimensões maiores do que as indicadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Dimensões máximas x comprimento equivalente para obtenção de pilar esbelto

Comprimento equivalente (cm)	400	500	600	700	800	900	1000
Dimensão máxima (cm)	15,3	19,2	23,0	26,9	30,7	34,6	38,4

A principal modificação a ser realizada para o dimensionamento de pilares esbeltos, em relação aos de índice de esbelteza menor, está relacionada à consideração das não-linearidades física e geométrica, representadas pelos efeitos locais de segunda ordem. Neste caso, adota-se o método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, 1/r e, também faz-se necessário considerar os efeitos da fluência.

### 2.1.1 Excentricidade de 1.ª Ordem

A norma ABNT NBR 6118:2014 especifica o momento mínimo de 1.ª ordem a ser adotado, em substituição aos efeitos locais nos pilares devido às imperfeições, dado pela seguinte equação:

$$M_{1d,min} = N_d \cdot (0,015 + 0,03h) \quad (4)$$

sendo  $N_d$  o esforço normal solicitante de cálculo e  $h$  a altura total da seção transversal na direção considerada, em metros.

Uma vez que não é possível desconsiderar a excentricidade mínima, o momento de 1.ª ordem é sempre comparado com o momento atuante no pilar devido ao carregamento, sendo adotado o maior entre esses dois valores. Já a obtenção dos momentos de segunda ordem e também

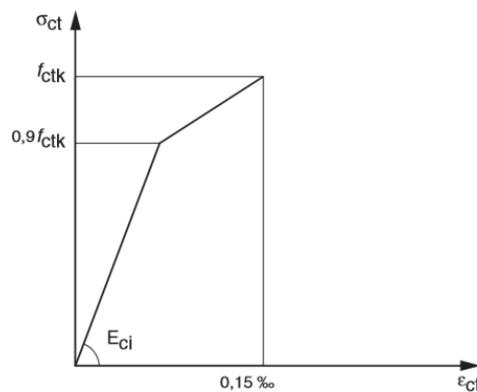
relativo à fluência é feita de forma direta pelo dimensionamento através das não-linearidades física e geométrica.

### 2.1.2 Diagrama M, N, 1/r

O diagrama momento-força normal-curvatura representa a curvatura do eixo da barra associada a determinado par de esforço normal e momento fletor. As hipóteses adotadas para a obtenção do diagrama são: a hipótese de Navier-Bernoulli, consideração de seções planas e rotações moderadas, aderência perfeita entre aço e concreto, comportamento não-linear dos materiais (por meio dos diagramas tensão-deformação não-lineares dos materiais) e ruptura da seção transversal definida pelas deformações limites do concreto e do aço.

Para a obtenção do diagrama M, N, 1/r foi considerado, no trecho no qual não há fissuração, a resistência à tração do concreto em seu trecho ascendente por meio do diagrama tensão-deformação bilinear, conforme representado na Figura 4.

Figura 2 – Diagrama tensão-deformação bilinear de tração (ABNT NBR 6118 (2014))



A partir da hipótese de Navier-Bernoulli, tem-se que o campo de deslocamentos no interior da barra é dado por:

$$u(x, y) = u_0(x) - y \cdot \frac{dv}{dx} \quad (5)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (6)$$

logo, trata-se de uma distribuição linear de deformações longitudinais ao longo da altura da seção transversal, dada por:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7)$$

assumindo como curvatura do eixo da barra a segunda derivada de  $v$ :

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (8)$$

desta forma, substituindo (8) em (7), a deformação em um ponto genérico da seção transversal é obtida por:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + y \cdot \chi \quad (9)$$

assim, pela hipótese de aderência perfeita, a deformação relativa em cada componente da seção transversal é:

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_0 + y_{ci} \cdot \chi \quad (10)$$

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_0 + y_{si} \cdot \chi \quad (11)$$

sendo  $\varepsilon_{ci}$  a deformação do concreto e  $\varepsilon_{si}$  a deformação do aço.

A partir dos diagramas tensão-deformação, obtêm-se as tensões nas fibras de concreto e em cada barra de aço. As equações de equilíbrio de esforços internos da seção transversal são:

$$N = \int_{A_c} \sigma_c dA + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_{si} A_{si} \cong \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci} \Delta A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_{si} A_{si} \quad (12)$$

$$M = \int_{A_c} \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_{si} y_{si} A_{si} \cong \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci} y_{ci} \Delta A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_{si} y_{si} A_{si} \quad (13)$$

segundo Gama (2015, p.74), “A relação momento-curvatura-força normal é obtida através do controle das deformações pelo qual vão sendo adotadas curvaturas  $\chi$ , de forma incremental, calculando-se assim os esforços internos (N, M) até que sejam equilibrados com os esforços externos ( $N_{ext}$ ,  $M_{ext}$ ) [...]”. Para essa iteração, recomenda-se a utilização do método de Newton-Raphson, por exemplo, de modo a obter a raiz da função definida por:

$$f(N) = N_{ext} - N = N_{ext} - \left( \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci} \Delta A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} \sigma_{si} A_{si} \right) \quad 14$$

$$\varepsilon_{0_{i+1}} = \varepsilon_{0_i} - \frac{f(N)}{f'(N)} \quad 15$$

para melhorar a convergência do algoritmo, o método de Newton pode ser adaptado e utilizado em conjunto com outros métodos de obtenção de raízes de função, como o método da bissecante, de modo a possuir um intervalo de solução, o qual é reduzido após cada iteração.

O método desenvolvido é adequado para pilares submetidos à flexo-compressão normal. No caso de pilares sujeitos a flexo-compressão oblíqua, o mesmo precisa sofrer adaptações, de modo a considerar a influência que o momento em uma das direções gera na outra direção, e assim, obter a curvatura correspondente de forma correta.

### 2.1.3 Efeito da fluência

De acordo com Araújo (2003, p.108), “A fluência do concreto pode ter uma importância significativa na capacidade resistente dos pilares. Em virtude da fluência, os deslocamentos transversais do eixo dos pilares crescem com o tempo, aumentando os momentos fletores solicitantes”.

O efeito da fluência, por sua vez, pode ser considerado de maneira aproximada, segundo Carvalho e Pinheiro (2009), pela excentricidade adicional  $e_{cc}$ , dada pela equação 16.

$$e_{cc} = \left( \frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) \cdot \left( 2,718^{\frac{\varphi N_{sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1 \right) \quad (16)$$

onde  $M_{sg}$  e  $N_{sg}$  são o momento e a força normal solicitantes devido à combinação quase permanente, respectivamente;  $e_a$  é a excentricidade devida a imperfeições locais;  $\varphi$  é o coeficiente de fluência; e  $N_e$  é a carga crítica de Euler, dada por:

$$N_e = \pi^2 \cdot E_{ci} \cdot I_c / l_e^2 \quad (17)$$

sendo  $E_{ci}$  o módulo de elasticidade inicial e  $I_c$  o momento de inércia na direção considerada.

### 2.1.4 Momento total de segunda ordem

A priori, em um problema de dimensionamento, apenas se sabe as dimensões da seção transversal do pilar e o posicionamento das barras de aço na mesma, neste caso de forma simplificada, ou seja, distribuindo uniformemente as barras em relação às faces do pilar. Devido à forma do diagrama de momentos fletores mostrado na Figura 2-b, é necessário verificar se a seção mais solicitada é a da extremidade ou uma seção intermediária. Para a seção da extremidade é considerada apenas a excentricidade mínima de 1.ª ordem (inicial, acidental e mínima), uma vez que o pilar possui os deslocamentos impedidos nos apoios. Por sua vez, a seção intermediária necessita ter a excentricidade inicial e acidental (a serem comparadas com a mínima), de 2.ª ordem e de fluência levadas em consideração. Para pilares esbeltos, o momento total de segunda ordem é

obtido por meio do método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, 1/r e o processo de dimensionamento pode ser feito da seguinte forma:

1. Tem-se as cargas solicitantes atuando nas extremidades do pilar: força normal e momento fletor;
2. Tem-se as propriedades geométricas do pilar: altura e largura da seção transversal e comprimento do pilar;
3. A partir do momento de primeira ordem, relacionado à excentricidade inicial de 1.<sup>a</sup> ordem, e da excentricidade adicional devido ao efeito da fluência, obtém-se um momento fletor inicial de cálculo ( $M_{1d,A}$ );
4. Calcula-se a área de aço,  $A_s$ , pelo dimensionamento da seção transversal mais solicitada;
5. Obtém-se o diagrama M, N, 1/r para a seção mais solicitada, ou seja, a de maior momento fletor inicial;
6. Obtém-se a curvatura da seção crítica (1/r) a partir do diagrama M, N, 1/r, correspondente ao maior dos valores entre o momento fletor solicitante de cálculo ou ao momento mínimo de primeira ordem;
7. Calcula-se o momento fletor de segunda ordem com o método do pilar-padrão, conforme equação 18:

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \cdot \frac{l_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad (18)$$

8. Repete-se o procedimento a partir do item 6, obtendo uma nova curvatura e consequentemente um novo momento fletor até a convergência do momento fletor e;
9. Repete-se o procedimento a partir do item 4, calculando uma nova área de aço e obtendo em seguida um novo diagrama M, N, 1/r; até a convergência da área de aço.

### 3 Formulação do Problema de otimização

O problema de otimização se baseia em encontrar a solução ótima que maximize ou minimize a função objetivo. No caso do dimensionamento de pilares, a função objetivo é o custo total do pilar (por metro linear), que engloba o custo do concreto, do aço e das formas utilizadas. Assim, a função objetivo a qual deseja-se minimizar pode ser definida por:

$$f_{(min)} = C_c \cdot A_c + C_a \cdot A_a \cdot \rho + C_f \cdot P_f \quad (19)$$

em que  $C_c$  é o custo do concreto (R\$/m<sup>3</sup>);  $A_c$  é a área da seção transversal de concreto (m<sup>2</sup>);  $C_a$  é o custo do aço (R\$/kg);  $A_a$  é a área de aço total na seção transversal de concreto (m<sup>2</sup>);  $\rho$  é o peso específico do aço (kg/m<sup>3</sup>);  $C_f$  é o custo das formas (R\$/m<sup>2</sup>) e  $P_f$  é o perímetro de formas (m), equivalente ao perímetro do pilar. Os parâmetros de custos dos materiais foram obtidos utilizando a Tabela Sinapi (2016).

A solução ótima para a função objetivo definida é dada por meio de cálculos iterativos que alteram os valores das variáveis sucessivamente, até obter o ponto de mínimo. Dessa forma, tem-se, no programa computacional desenvolvido, para seções retangulares, as variáveis e as restrições definidas em SOUZA e ALVES (2016). Neste artigo, entretanto, o índice de esbeltez ( $\lambda$ ) dos pilares foi estendido até 140.

$$(\lambda_x; \lambda_y) \leq 140 \quad (20)$$

neste programa, a otimização é efetuada utilizando o método dos pontos interiores, disponível na biblioteca do *software Matlab*. A interface do programa desenvolvido pode ser vista nas Figuras 6, 7, 11 e 12 que apresentam os resultados dos exemplos analisados neste trabalho. Como dados de entrada, tem-se os valores da geometria do pilar, as características dos materiais e os esforços solicitantes, de cálculo, utilizados no dimensionamento do pilar e característicos, necessários para a obtenção da excentricidade devido à fluência.

## 4 Metodologia

Para a implementação do problema de otimização no dimensionamento de pilares esbeltos com concreto de ala resistência, a plataforma do Matlab foi utilizada. Escolheu-se o Matlab por ter nas suas bibliotecas do algoritmo para solução do problema de otimização previamente implementados.

Para validar a análise do efeito de segunda ordem, bem como a implementação do diagrama de iteração  $M$ ,  $N$ ,  $l/r$  utilizou-se como ferramenta o software de cálculo estrutural TQS (2016) por meio da sua calculadora para pilares.

Para pilares medianamente esbeltos os parâmetros do diagrama de iteração  $M$ ,  $N$ ,  $l/r$  são dados por:

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \cdot \frac{l_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad (21)$$

em que  $\alpha_b$  varia de acordo com a vinculação dos extremos do pilar, neste caso considerado biapoiado com momentos menores que o mínimo, logo vale 1,0 e  $l/r$  obtido por:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \cdot (v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad (22)$$

sendo  $h$  a altura da seção transversal na direção considerada,  $A_c$  a área de concreto da seção transversal e  $v$  a força adimensional, dada por:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (23)$$

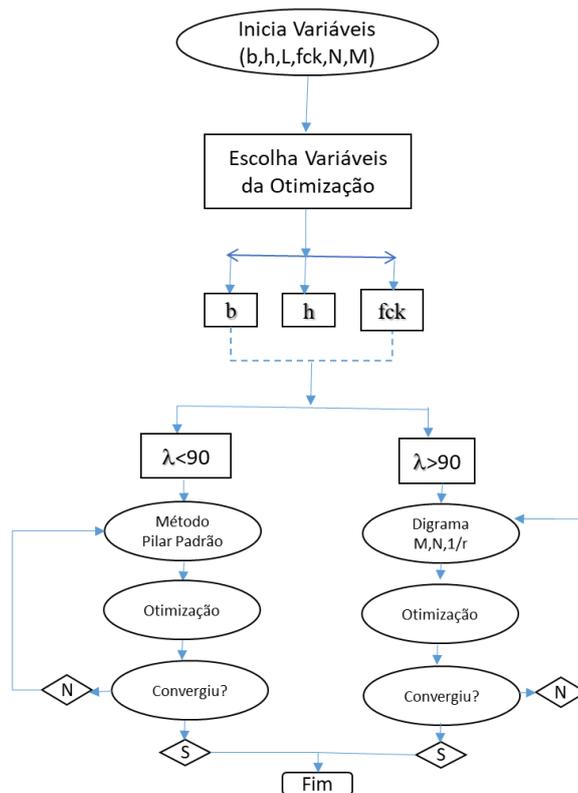
por outro lado, para pilares do esbeltez acima de 90 a excentricidade acidental é dada por:

$$e_a = \theta_1 \cdot \left( \frac{l_e}{2} \right) \quad (24)$$

exemplos numéricos serão apresentados, de modo a comparar os resultados fixando a geometria e  $f_{ck}$ , variando a geometria e fixando o  $f_{ck}$ , bem como variando a geometria e o  $f_{ck}$ .

A análise de custo final do processo de otimização foi feita tomando como referência os valores executados na cidade de Vitória – ES. Estes resultados podem variar, caso outros valores de outras partes do Brasil forem considerados. Um Fluxograma do funcionamento do software desenvolvido é apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Fluxograma de funcionamento do programa



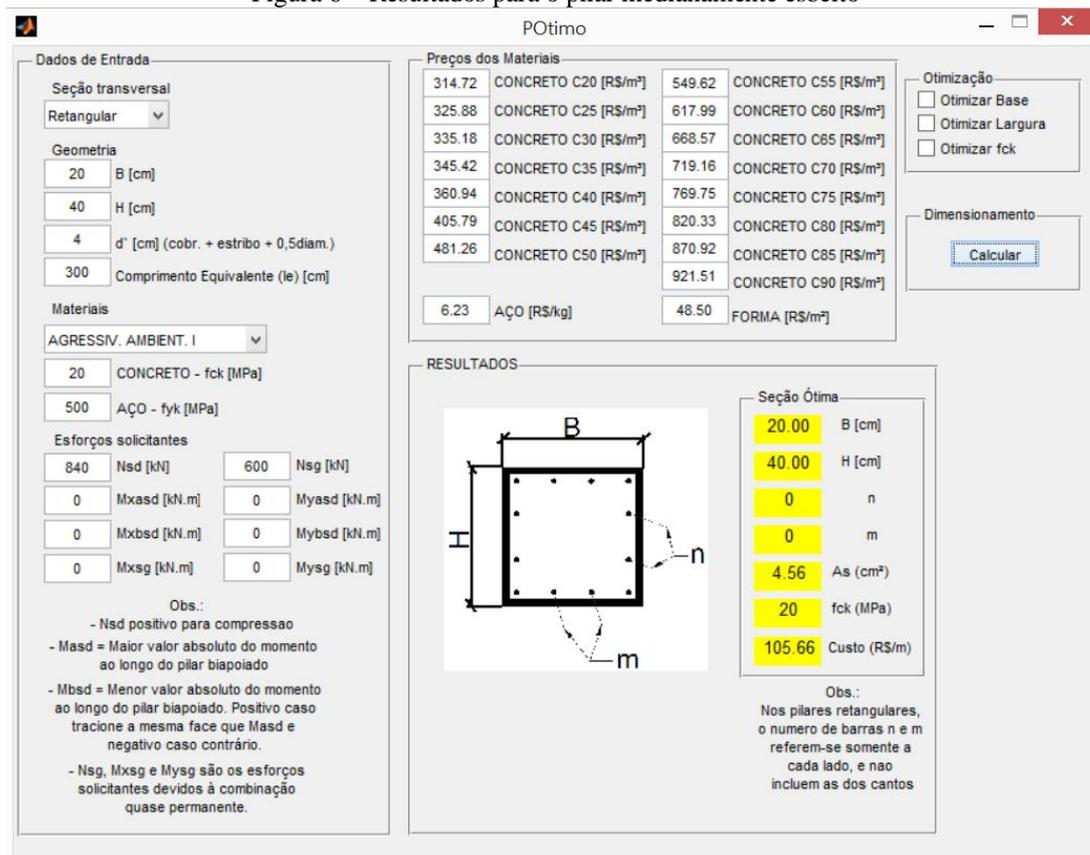
Fonte: Autores

## 4.1 Exemplo de aplicação

Para avaliação da influência dos efeitos de segunda ordem em pilares esbeltos, bem como dos efeitos da fluência, o mesmo exemplo foi calculado duas vezes no *software* desenvolvido, a primeira com índice de esbeltez abaixo de 90, e a segunda considerando-se um pilar esbelto. Apesar de o *software* ter as opções de otimização da seção e do  $f_{ck}$ , as mesmas não representam a intenção principal deste artigo, logo, não foram utilizadas.

O exemplo calculado apresentado por Carvalho e Pinheiro (2009) refere-se a um pilar retangular 20x40cm, submetido à força normal de cálculo  $N_{sd}=840\text{kN}$ , sendo 600kN o esforço normal característico devido à combinação quase permanente e replicado por Souza e Alves (2016). O  $f_{ck}$  considerado foi de 20MPa, aço CA-50, distância da borda da seção ao eixo das barras de armadura de 4cm, apesar de ser inferior ao mínimo exigido pela ABNT NBR 6118:2014 para pilares localizados em ambientes de classe de agressividade ambiental I. Inicialmente, o comprimento equivalente do elemento comprimido foi de 3m. Os resultados para este exemplo estão mostrados na Figura 6 e similares aos encontrados por Carvalho e Pinheiro (2009) sem otimizar geometria e  $f_{ck}$ .

Figura 6 – Resultados para o pilar medianamente esbelto



Fonte: Autores

Desta forma, tem-se que a seção precisaria de uma área de aço de 4,56cm² para resistir aos esforços solicitantes, o que, devido aos valores considerados para os preços dos materiais geraria um custo de R\$105,66 por metro linear.

O índice de esbeltez máximo deste pilar é 51,96, caracterizando-o como um pilar medianamente esbelto. Assim, o momento mínimo de primeira ordem ( $M_{1d,A}$ ) nessa direção, obtido pela equação (4) foi de 17,64kN.m.

Por se tratar de um pilar medianamente esbelto, o momento de segunda ordem foi calculado pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada, definido pela seção 15.8.3.3.2 da ABNT NBR 6118:2014, conforme equações 21 a 23.

Logo, substituindo-se os valores, tem-se:

$$\nu = \frac{840}{0,2 \cdot 0,4 \cdot 20000/1,4} = 0,735 \quad (25)$$

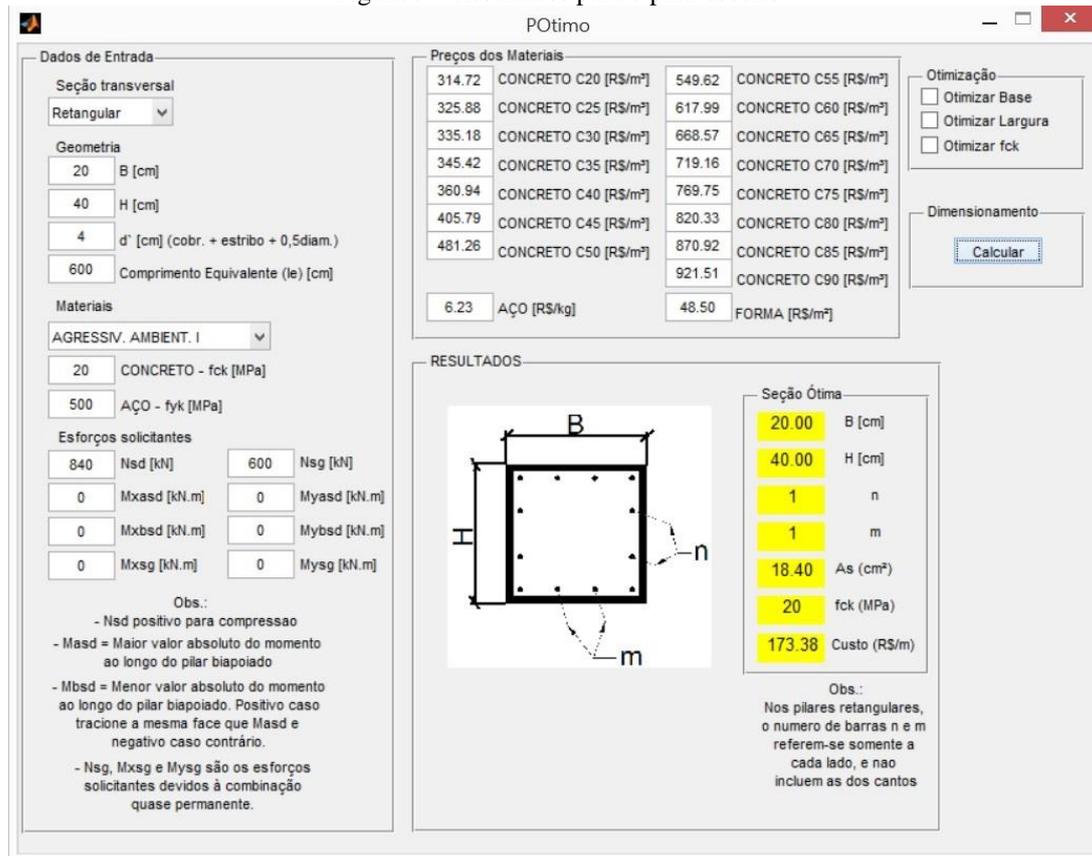
$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{0,2 \cdot (0,735 + 0,5)} = 0,020 \leq \frac{0,005}{0,2} = 0,025 \therefore \frac{1}{r} = 0,02 \quad (26)$$

$$M_{d,tot} = 1,0 \cdot 17,64 + 840 \cdot \frac{3^2}{10} \cdot 0,02 = 32,76 \geq 17,64 \therefore M_{d,tot} = 32,76 \quad (27)$$

obteve-se, assim, o momento total solicitante de cálculo (32,76kN.m), que, neste caso, por se tratar de pilar com esbeltez inferior a 90 não precisa levar em consideração o efeito da fluência.

Em seguida, o comprimento equivalente do elemento comprimido foi modificado para 6m, e os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 7.

Figura 7 – Resultados para o pilar esbelto



Fonte: Autores

Desta forma, percebe-se que a seção necessária de uma área de aço de 18,40cm<sup>2</sup> para resistir aos esforços solicitantes e que geraria um custo de R\$173,38 por metro linear. O índice de esbeltez máximo deste pilar é 103,92, caracterizando-o como um pilar esbelto. O momento mínimo de primeira ordem ( $M_{1d,A}$ ) é o mesmo obtido para o pilar medianamente esbelto (17,64kN.m).

Entretanto, devido ao índice de esbeltez superior a 90, este pilar exige consideração do efeito da fluência, dado pela equação (16), para o qual é necessário calcular o valor da excentricidade acidental e da carga crítica de Euler. A excentricidade acidental apresentada na Equação (24) é dada por:

$$\theta_1 = \frac{1}{100 * \sqrt{l_e}} = \frac{1}{100 * \sqrt{6}} = 4,08 \cdot 10^{-3} \quad (28)$$

limitado por

$$\frac{1}{300} = 3,33 \cdot 10^{-3} \leq \theta_1 = 4,08 \cdot 10^{-3} \leq \frac{1}{200} = 5 \cdot 10^{-3} \therefore \theta_1 = 4,08 \cdot 10^{-3} \quad (29)$$

$$e_a = 4,08 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{6}{2}\right) = 0,01224 \quad (30)$$

a carga crítica de Euler, calculada pela equação (17) vale:

$$N_e = \frac{\pi^2 \cdot 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{20} \cdot 1000 \cdot 0,4 \cdot 0,2^3 / 12}{6^2} = 1556,28 \quad (31)$$

e adotou-se 2 para o coeficiente de fluência, logo, substituindo os valores na equação (16):

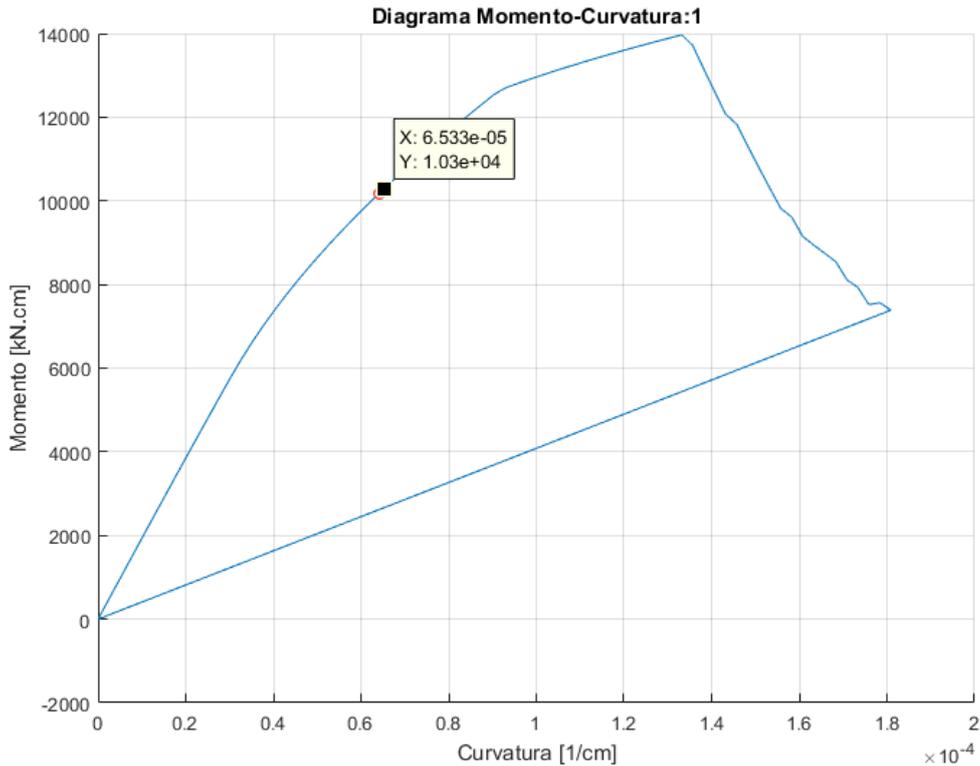
$$e_{cc} = \left(\sqrt[0]{600} + 0,01224\right) \cdot \left(2,718^{\frac{2 \cdot 600}{1556,28 - 600}} - 1\right) = 0,03 \quad (32)$$

a partir da excentricidade devido à fluência, o momento gerado pela mesma, em kN.m, é calculado:

$$M_{cc} = N_d \cdot e_{cc} = 840 \cdot 0,03 = 25,2 \quad (33)$$

por fim, foi obtida a curvatura correspondente à seção e referente ao momento mínimo de primeira ordem, já que neste caso não há momento fletor solicitante na seção (pois os valores de momento estão zerados nos dados de entrada do programa), pelo diagrama de interação momento-força normal-curvatura desenvolvido. Este diagrama pode ser visualizado na Figura 8.

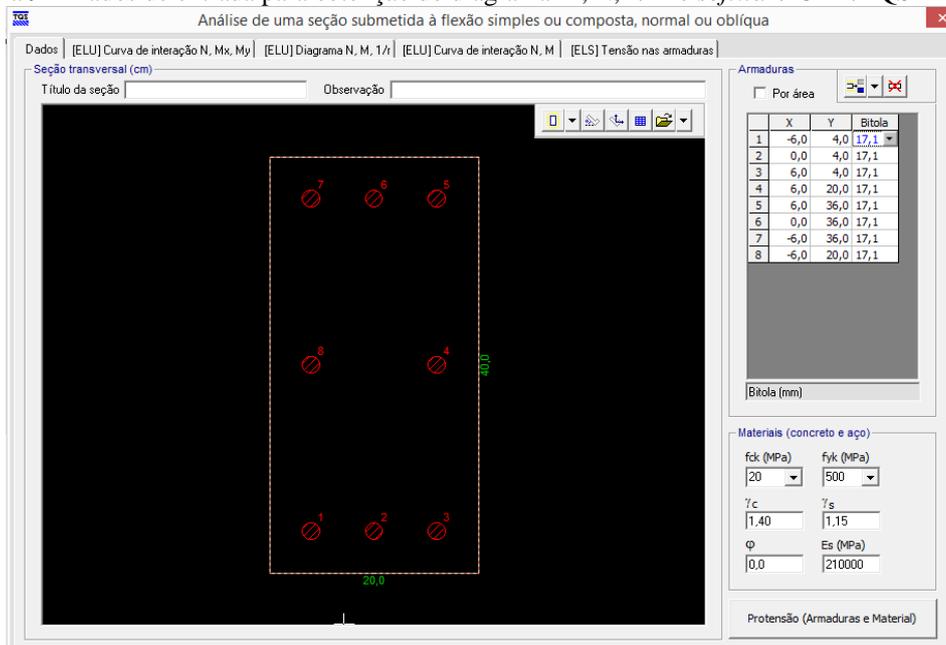
Figura 8 – Diagrama de interação M, N, 1/r (em 1/cm)



Fonte: Autores

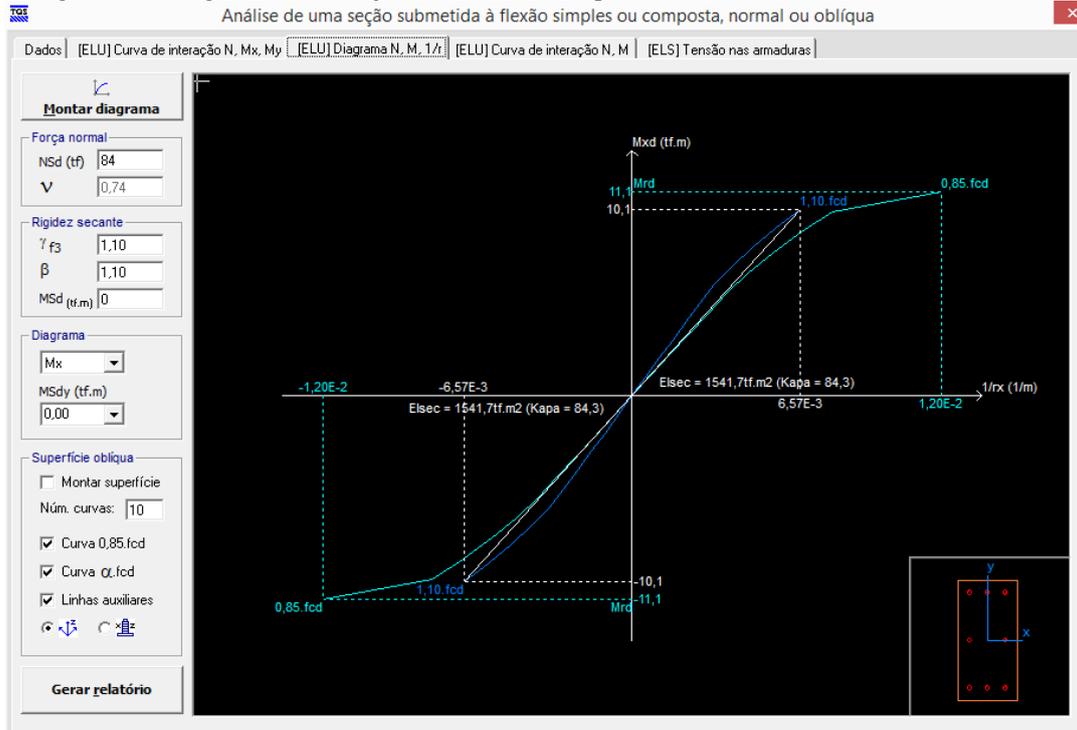
Este diagrama pode ser validado com o obtido pelo *software* CAD/TQS V.19.10, para os mesmos dados do problema, conforme mostrado nas Figuras 9 e 10.

Figura 9 – Dados de entrada para obtenção do diagrama M, N, 1/r no *software* CAD/TQS



Fonte: TQS (2016)

Figura 10 – Diagrama de interação M, N, 1/r obtido pelo software CAD/TQS V.19.10 (em 1/m)



Fonte: TQS (2016)

Foi utilizado, então, o método do pilar-padrão acoplado ao diagrama M, N, 1/r e, pode-se obter o momento substituindo-se os valores na equação 21.

$$M_{d,tot} = 1,0 \cdot 17,64 + 840 \cdot \frac{6^2}{10} \cdot 0,0012 = 21,27 \geq 17,64 \therefore M_{d,tot} = 21,27 \quad (33)$$

este momento precisa ainda ser somado ao momento gerado pela fluência:

$$M_{tot} = M_{d,tot} + M_{ecc} = 21,27 + 25,2 = 46,47 \quad (34)$$

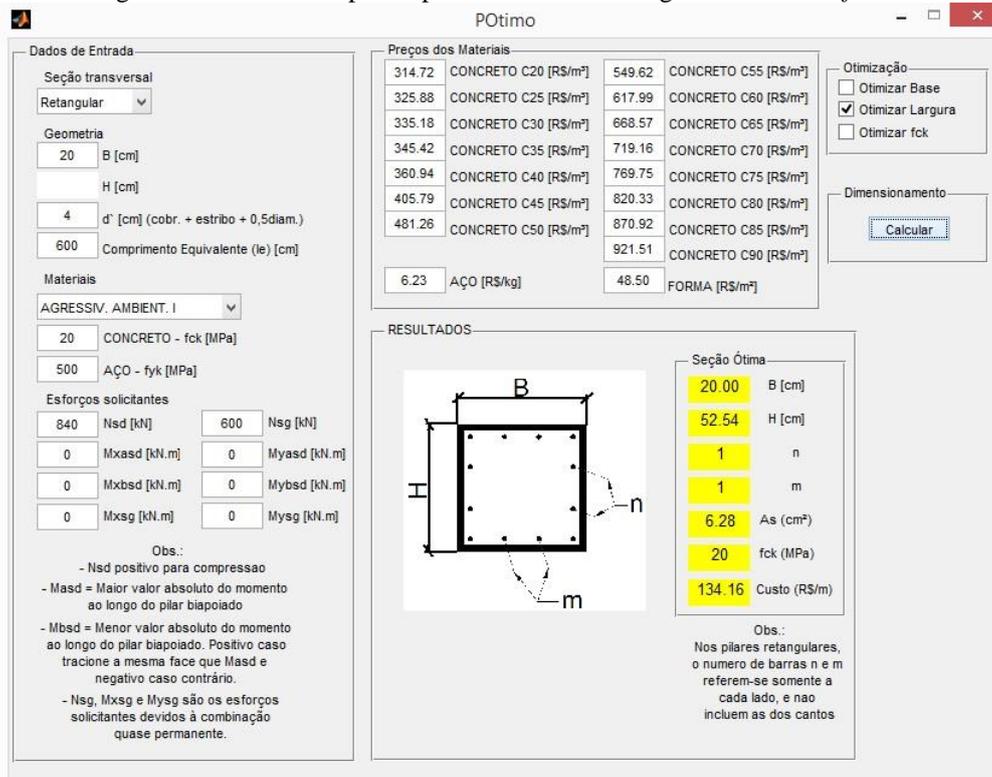
dessa forma, apresenta-se o Quadro 2 comparativo com os valores de momentos encontrados para cada uma das análises. Como se pode perceber, o efeito de fluência elevou o esforço de momento em aproximadamente 42%.

Quadro 2 – Comparação entre momentos para pilar medianamente esbelto e esbelto

Comprimento equivalente (m)	Esbeltez	Momento de 1. <sup>a</sup> ordem (kN.m)	Momento devido à fluência (kN.m)	Momento de 2. <sup>a</sup> ordem (kN.m)	Momento total (kN.m)
3,00	51,96	17,64	-	15,12	32,76
6,00	103,92	17,64	25,2	3,63	46,47

Em seguida, para testar a parte de otimização do programa desenvolvido, manteve-se a base do pilar fixa e liberou-se a largura para ser otimizada, bem como a área de aço. Liberou-se a altura e fixou-se a largura em 20cm de modo que o pilar permaneça esbelto nesta direção quando matem-se o comprimento de 6m. Os resultados são apresentados na Figura 11.

Figura 11 – Resultados para o pilar esbelto com a largura otimizada e  $f_{ck}$  fixo



Fonte: Autores

Os resultados apresentados na Figura 10 mostram que quando a altura da seção foi liberada com variável no projeto de otimização, obteve-se um valor de  $h=52,54\text{cm}$  e uma área de aço  $A_s=6,28\text{cm}^2$  e o custo final por metro linear de pilar igual a R\$ 134,16 (Quadro 3).

Quadro 3 – Comparação dos resultados da otimização

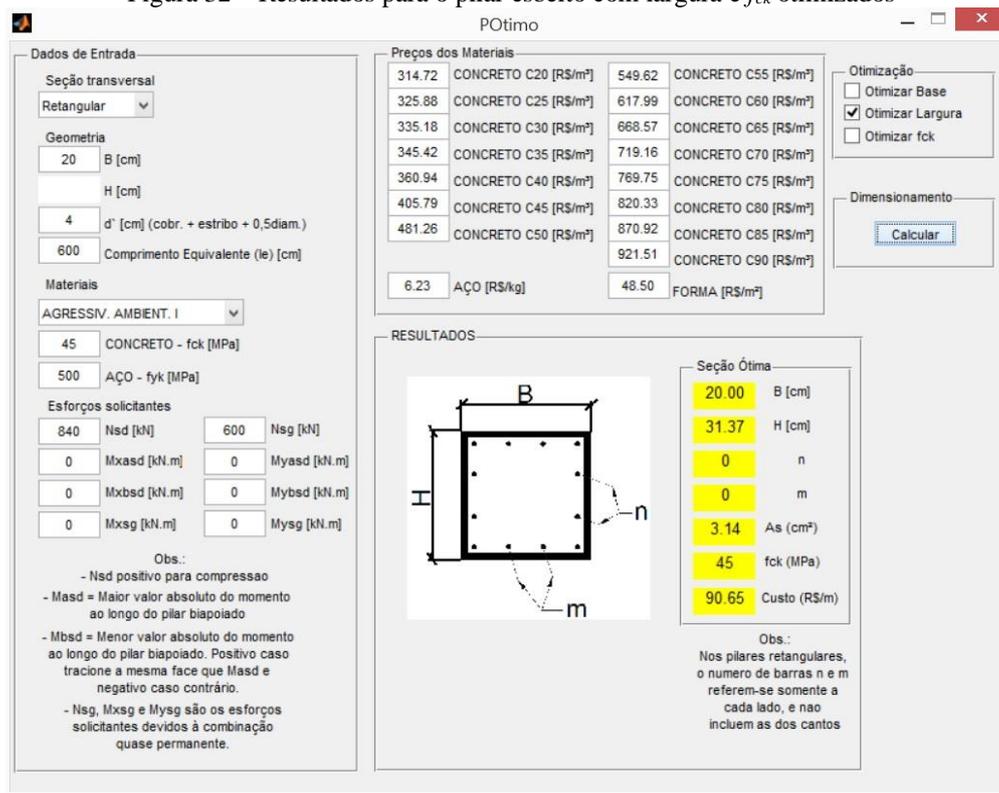
	<b>b(cm)</b>	<b>h(cm)</b>	<b><math>A_s(\text{cm}^2)</math></b>	<b>Custo (R\$)</b>	<b>Diff(%)</b>
<b>Seção Original (<math>\square &lt; 90</math>)</b>	20	40	4,56	105,66	
<b>Seção (<math>\square &gt; 90</math>)</b>	20	40	18,40	173,38	+64,09
<b>Seção h, <math>A_s</math> otimizados</b>	20	52,54	6,28	134,16	-22,62

Fonte: autores

Como pode ser observado no Quadro 3, o aumento da esbeltez no pilar para este exemplo, como era de esperar, faz com que se tenha um aumento do custo final do pilar. Por outro lado, quando liberou-se o altura e a área de ação para serem otimizados e manteve-se a largura, de modo que o pilar continua esbelto nesta direção, houve uma redução neste custo de 22,62%.

Por fim, liberou-se neste último exemplo o  $f_{ck}$  também como variável de projeto para ser otimizado. Os resultados da otimização são apresentados na Figura 12. No Quadro 4 é apresentado o resumo comparativo com os exemplos anteriores.

Figura 32 – Resultados para o pilar esbelto com largura e  $f_{ck}$  otimizados



Fonte: autores

Quadro 4 – Comparação dos resultados com a otimização do  $f_{ck}$

	<b>b(cm)</b>	<b>h(cm)</b>	<b>As(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>fck(MPa)</b>	<b>Custo (R\$)</b>	<b>Diff(%)</b>
<b>Seção Original (<math>\square &lt; 90</math>)</b>	20	40	4,56	20	105,66	
<b>Seção (<math>\square &gt; 90</math>)</b>	20	40	18,40	20	173,38	+64,09
<b>Seção h, As otimizados</b>	20	52,54	6,28	20	134,16	-22,62
<b>Seção h, As e <math>f_{ck}</math> otimizados</b>	20	31,37	3,14	45	90,65	-32,43

Fonte: autores

Conforme pode ser observado no Quadro 4, ao considerar o  $f_{ck}$  como variável de projeto, aumentou-se a resistência do concreto do pilar para 45MPa, porém com uma redução do custo final de 32,43% em comparação com o resultado sem a otimização do  $f_{ck}$  e 48% em comparação com o problema sem aplicação das técnicas de otimização.

Observa-se para este exemplo, que no caso do pilar esbelto, não se obteve resultado com  $f_{ck}$  acima de 50MPa, isto talvez ocorra devido ao alto custo desses concretos na região da grande Vitória – ES.

## 6 Conclusões

Como se pode observar a formulação para o dimensionamento otimizado de pilares esbeltos é válida, tendo em vista os resultados apresentados e comparados com o *software* comercial. Apesar de os pilares esbeltos serem poucos utilizados na prática, tendo em vista a limitação de dimensões, em algumas vezes seu uso é necessário. O processo de otimização se mostra aplicável com os exemplos apresentados para pilares esbeltos em vez de aplicarmos o processo de tentativa e erro para o dimensionamento.

A partir da comparação dos valores da curvatura obtidos pelo método aproximado e pelo método do pilar padrão acoplado a diagramas M, N, 1/r, pode-se concluir que, o método aproximado é muito conservador em relação ao acoplado ao diagrama M, N, 1/r. Em seguida,

comparando-se os momentos de segunda ordem calculados a partir dessas curvaturas nota-se que, se fosse utilizada a curvatura do método aproximado, com o comprimento equivalente maior, o momento de 2.<sup>a</sup> ordem seria muito grande (60,48kN.m), o que, provavelmente impossibilitaria a utilização da seção de concreto, ou aumentaria em muito a armação necessária para a mesma. Por outro lado, a utilização da curvatura obtida pelos diagramas M, N, 1/r faz com que o momento seja de menor magnitude para a seção reforçando, assim, a importância dessa análise mais criteriosa ao se tratar de pilares esbeltos.

É válido ressaltar que o momento devido à fluência é diretamente influenciado pela parcela de carga permanente presente do esforço normal. No exemplo analisado este foi o maior momento obtido para o pilar esbelto, demonstrando assim, sua relevância no dimensionamento dos mesmos. Conclui-se que pela análise dos Quadros 3 e 4, que a liberação da largura para ser otimizada forneceu uma redução no custo total por metro da seção de 22,6%, gerada pelo aumento da seção de concreto, tendo em vista a redução da área de aço necessária. Esta economia foi ainda maior, em torno de 48%, com a otimização do  $f_{ck}$ . O aumento do  $f_{ck}$  permitiu a redução da seção de concreto e levou à utilização da área mínima de aço possível, ou seja, 4 barras com 10mm de diâmetro, cada. Dessa forma, tem-se que a otimização é fundamental para a redução de custos no dimensionamento dos pilares esbeltos, juntamente com a definição precisa dos custos dos materiais utilizados.

## 7 Referências

ARAÚJO, J. M.. **Curso de concreto armado**. v.3. 2. Ed. Rio Grande: Dunas, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

CARDOSO JÚNIOR, S. D. **Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado**. 2014. 55f. Monografia (Especialista em Gestão de Projetos de Sistemas Estruturais) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M.. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. v.2. 1. Ed. São Paulo: PINI, 2009.

FRANCO, T. R.. **Análise do efeito de segunda ordem em pilares segundo a NBR6118 e pelos métodos exatos**. 2010. 67f. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010.

GAMA, P. V. C. N.. **Contribuições ao dimensionamento de torres eólicas de concreto**. 2015. 203f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2015.

MatLab, *Optimization toolbox user's guide*. Natick: Mathworks, 2013.

PIRES, S. de L.; SILVA, M. C. A. T. da. Otimização de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua considerando as não linearidades física e geométrica. **VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas**. Rio de Janeiro, 2014.

SIAS, F. M.; ALVES, E. C.. Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado. **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**. Vol. 9 nº3 p. 16-31, 2014.

SIAS, F. M.; ALVES, E. C.. Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado segundo a NBR 6118:2014.. **Engenharia Estudo e Pesquisa**. Vol. 14 nº2 p. 46-57, 2015.

SOUZA, P. M. S.; ALVES, E. C.. Dimensionamento otimizado de pilares de concreto de alta resistência. **58º Congresso Brasileiro do Concreto**. São Paulo, IBRACON, 2016.

TABELA SINAPI – Disponível em: < <http://www.caixa.gov.br/poder-publico/apoio-poder-publico/sinapi/Paginas/default.aspx>> Acessado em: 30 de maio, 2016.

TQS INFORMÁTICA LTDA, Manual Pórtico e Grelhas – TQS, São Paulo, 2013