

# Modelo quadrilogístico aplicado aos óbitos por covid-19 no Brasil, Minas Gerais e em duas de suas cidades

## Quadrilogistic model applied to covid-19 deaths in Brazil, Minas Gerais and two of its cities

<sup>1</sup>José Sérgio Domingues, <sup>2</sup>Mayra Carolina Arantes, <sup>3</sup>Gabriela Fonseca Castro

<sup>1</sup>Professor Doutor da Área Acadêmica de Matemática – Instituto Federal de Minas Gerais  
(sergio.domingues@ifmg.edu.br)

<sup>2</sup>Graduada em Matemática – Instituto Federal de Minas Gerais (carolinamayra2000@gmail.com)

<sup>3</sup>Graduada em Matemática – Instituto Federal de Minas Gerais (gabifonseccastro@gmail.com)

---

**RESUMO:** O comportamento dos casos de óbitos acumulados na pandemia de covid-19 sugere várias fases de crescimento, que se iniciam mais lentamente, passam por uma elevada taxa de crescimento e finalizam com tendência de estabilidade. Por isso, o objetivo principal deste trabalho é modelar e analisar a qualidade do ajuste desses dados pelo modelo de crescimento quadrilogístico, considerando quatro ondas de crescimento no número de óbitos. A análise foi feita para todo o Brasil, para o estado de Minas Gerais e para as cidades de Divinópolis e Formiga, no Centro-Oeste de Minas. As estimativas iniciais para os parâmetros foram feitas com base nos dados oficiais, e otimizados pelo método do Gradiente Reduzido Generalizado. Como resultados, Minas obteve o menor erro absoluto percentual médio e o Brasil ficou com o maior. Além disso, todas as regiões analisadas apresentaram alto coeficiente de determinação, mostrando que todas as projeções dos modelos e os dados oficiais possuem correlação linear muito forte. Conclui-se que o modelo utilizado capturou de forma significativa a dinâmica de crescimento do número de óbitos acumulados na pandemia, incluindo pontos de equilíbrio e de inflexão.

**Palavras Chave:** Modelagem matemática. Gradiente Reduzido Generalizado. Análise epidemiológica. Previsão de mortalidade. Ajuste de dados. Pandemia.

**ABSTRACT:** The behavior of death cases accumulated in the COVID-19 pandemic suggests several phases of growth, which begin more slowly, go through a high growth rate and end with a tendency towards stability. Therefore, the main objective of this work is to model and analyze the quality of the fit of these data using the quadrilogistic growth model, considering four waves of growth in the number of deaths. The analysis was carried out for Brazil, the state of Minas Gerais, and the cities of Divinópolis and Formiga, in the Center-West of Minas Gerais. Initial estimates for the parameters were made based on official data and optimized using the Generalized Reduced Gradient method. The results showed that Minas Gerais had the lowest mean absolute percentage error and Brazil had the highest. In addition, all the regions analyzed had a high coefficient of determination, showing that all the model projections and official data have a robust linear correlation. It can be concluded that the model used significantly captured the growth dynamics of the number of deaths accumulated in the pandemic, including equilibrium and inflection points.

**Keywords:** Mathematical modeling. Generalized Reduced Gradient. Epidemiological analysis. Mortality forecasting. Data fitting. Pandemic.

---

## 1. INTRODUÇÃO

A covid-19 é uma doença infecciosa causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, descoberta em dezembro de 2019 na cidade de Wuhan, na China, e se espalhou rapidamente pelo mundo, sendo declarada uma pandemia pela Organização Mundial da Saúde (OMS) em março de 2020. No Brasil, a Portaria n. 188/GM/MS, de 03 de fevereiro de 2020, publicada em 04 de fevereiro, declarou emergência em saúde pública de importância nacional. Os sintomas mais comuns incluem febre, tosse seca, cansaço, dor de cabeça, perda de paladar ou olfato, dor muscular e vários outros. Ela pode ser fatal, especialmente para pessoas idosas e aquelas com problemas cardiovasculares, diabetes, problemas respiratórios crônicos ou câncer (BRASIL, 2020b; BRASIL, 2020c; WHO, 2022; HAO *et al.*, 2022).

Na Europa, nove países registraram um total de 47 casos até 21 de fevereiro de 2020, e poucos dias depois, em 5 de março de 2020, já eram 4.250 casos e 113 mortes notificadas. Até janeiro de 2023 o continente europeu tinha cerca de 2,1 milhões de mortes registradas devido à doença (CYRANOSKI, 2020; LIU, 2020; SPITERI, 2020; GAGLIARDI, 2023).

Dados oficiais mais recentes apontam que nos Estados Unidos, até dezembro de 2023, o número de óbitos acumulados por covid era pouco maior que 1,1 milhão, correspondendo à uma taxa de mortalidade de cerca de 1% (WORDOMETERS, 2023; CDC, 2023). No Brasil, considerando o mesmo período, a taxa de mortalidade era quase duas vezes a dos Estados Unidos, já que até 19 de dezembro de 2023 foram 38.130.675 casos confirmados, com 708.237 óbitos, mostrando que cerca de 1,9% dos casos confirmados evoluíram para óbito.

Um parâmetro útil para analisar a letalidade da doença é o número de óbitos a cada 100 mil habitantes. No Brasil, o Painel Coronavírus emerge como uma fonte crucial para a obtenção de dados e estatísticas oficiais relacionadas à covid-19 (BRASIL, 2020a). Os cálculos presentes nesse painel são fundamentados na estimativa populacional para o Tribunal de Contas da União (TCU) referente ao ano de 2019, anterior ao surto pandêmico no país, com uma população estimada de 210.147.125 habitantes. A análise desses dados até 19 de dezembro de 2023 revela que o Brasil registrava uma taxa de 337 óbitos a cada 100 mil habitantes. Essa abordagem estatística proporciona uma compreensão mais abrangente do impacto da covid-19, permitindo uma avaliação contextualizada em relação à densidade populacional do país (BRASIL, 2020a; BRASIL, 2021).

O estado de Minas Gerais (MG) se destaca por ter a menor taxa de óbitos por 100 mil habitantes dentre os quatro estados do sudeste, considerando todo o período da pandemia. Com cerca de 21.168.791 habitantes em 2019 e total de óbitos igual a 66.059, em 19 de dezembro de 2023, chega-se a 312 óbitos a cada 100 mil habitantes do estado, com taxa de mortalidade total de aproximadamente 1,56% e, portanto, menor que a taxa nacional (BRASIL, 2020a; BRASIL, 2021).

A vacinação contra a covid-19 no país começou em 17 de janeiro de 2021, no estado de São Paulo. Em Minas Gerais a primeira vacina foi aplicada apenas um dia após a primeira do país, em 18 de janeiro. E conforme o número de pessoas vacinadas foi aumentando, o número de casos e de óbitos passou a crescer mais lentamente, indicando tendência de estabilidade (MATRAVOLGYI e ANDRADE, 2022; BITAR, 2022).

Durante a pandemia ficou evidenciada a importância de modelos matemáticos de crescimento epidemiológico na compreensão e gestão da disseminação da doença. Existem vários modelos que podem e foram utilizados. Dentre eles, os modelos logístico e de Gompertz, ambos limitados por um valor assintótico, tendendo à estabilidade quando o tempo aumenta, o que significa que à medida que a população cresce, a taxa de crescimento diminui (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2021; OLIVEIRA, 2022).

Dattoli *et al.* (2020) exploraram a dinâmica da evolução da doença na Itália empregando tanto o modelo de Gompertz quanto o logístico, abrangendo menos de um mês, entre fevereiro e março de 2020. No estudo conduzido por Wu *et al.* (2020), duas formas do modelo logístico foram empregadas para analisar o comportamento do número de casos de covid-19 em diversas regiões da China e em vários outros países durante o curto período de 19 de janeiro a 10 de março de 2020. Também para um curto período de tempo, Mandieta *et al.* (2020) aplicaram o modelo logístico aos dados de Cuba, enquanto Assis e Carvalho (2020) o aplicaram para ajustar os números de casos e óbitos no Brasil, visando compreender o cenário futuro, caso a tendência do comportamento da transmissão da doença se adaptasse bem à curva de crescimento logístico.

Figueiredo *et al.* (2020) modelaram o número acumulado de óbitos no Brasil e em outros cinco países, com base nos modelos de Gompertz e Von Bertalanffy. Para o Brasil, o segundo modelo não apresentou convergência, e só o de Gompertz foi analisado em detalhes.

Os dados utilizados pelos autores são do pequeno período de 3 de março a 23 de maio de 2020. Alguns dos critérios para analisar a qualidade dos modelos foram o erro absoluto percentual médio, cuja sigla em inglês é MAPE (Mean Absolute Percentual Error) e o coeficiente de determinação,  $R^2$ . O modelo de Gompertz para o Brasil teve MAPE de 1,09% e  $R^2 = 0,999$ , configurando ótimo ajuste das previsões do modelo aos dados utilizados.

Com dados de um período um pouco maior, de 3 de março a 15 de julho de 2020, Uba et al. (2020) ajustaram e analisaram a tendência epidêmica dos casos de óbitos por covid-19, com uso dos modelos de Von Bertalanffy, Baranyi-Roberts, Morgan-Mercer-Flodin (MMF), Richards modificado, Gompertz modificado, logístico modificado e de Huang. Um dos principais métodos que os autores utilizaram para analisar a qualidade dos ajustes dos modelos aos dados foi o  $R^2$ , cujo maior valor ocorreu para o modelo MMF, com  $R^2 = 0,996$ .

Com uso do modelo Gompertz, Valle (2020) ajustou os dados de casos e óbitos por covid-19 no Brasil e em dois estados, Rio de Janeiro e São Paulo. Os dados correspondem ao período de 26 de fevereiro a 2 de julho de 2020. Os modelos tiveram qualidade analisada com base nos valores de  $R^2$  e do MAPE, sendo que, para o Brasil, o modelo para os óbitos acumulados apresentou  $R^2 = 0,999$  e MAPE de 3,9%, garantindo ótimo ajuste, mesmo que o período analisado seja pequeno.

Como descrito, a maioria dos trabalhos pesquisados que ajustam os dados de óbitos acumulados na pandemia são referentes aos seus primeiros meses. Um trabalho que ajusta o número de óbitos acumulados por todo o período da pandemia, com base em cada semana epidemiológica (SE), em MG e duas de suas cidades, Formiga e Divinópolis, por meio do modelo logístico, é apresentado em Arantes, Castro e Domingues (2023). Nele, os ajustes realizados apresentam altos coeficientes de correlação entre as projeções dos modelos e os dados oficiais, mas todos com MAPE superior a 10%. Contudo, é argumentado que os gráficos de dispersão dos dados indicam várias fases de crescimento.

A consideração do uso de modelos com múltiplas fases de crescimento foi observada nos trabalhos de Silva, Leite e Melo (2021) e Calatayud, Jornet e Mateu (2022). O primeiro, utiliza um modelo com duas fases de crescimento logístico (denominado bilogístico) para ajustar os dados dos primeiros 1015 casos da doença em indígenas do Estado do Amapá e norte do Pará, com dados de abril a setembro de 2020, obtendo  $R^2 = 0,9970$ . O segundo trabalho, talvez por considerar um período maior de obtenção dos dados, de março de 2020 a fevereiro de 2021, utilizou um modelo estocástico de quatro fases de crescimento logístico (um tipo de modelo quadrilogístico), para ajustar o número de casos de covid-19, em duas regiões da Espanha, também com bons resultados.

A percepção de várias fases de crescimento de óbitos feita em Arantes, Castro e Domingues (2023), e a utilização de modelos deste tipo na modelagem do crescimento do número de casos em Silva, Leite e Melo (2021) e Calatayud, Jornet e Mateu (2022), justificam o objetivo da análise, que é verificar se o modelo quadrilogístico se ajusta bem aos dados da evolução de óbitos acumulados para Formiga, Divinópolis, MG e também para todo o Brasil, além de aplicá-lo para determinar as fases de estabilidade e os pontos de inflexão durante todo o período da pandemia.

## 2. MATERIAIS E MÉTODO

Nesta seção, são abordados os aspectos relacionados à teoria utilizada para a realização da pesquisa, especialmente os modelos matemáticos utilizados, a escolha por um modelo de quatro fases de crescimento (o modelo quadrilogístico), a apresentação desse modelo e seus parâmetros, o método utilizado para otimização dos parâmetros do modelo, e como os dados utilizados para estimar as condições iniciais do modelo foram obtidos.

## 2.1 Modelo logístico

O modelo logístico aplicado a populações é obtido ao se resolver a equação diferencial ordinária dada pela Equação (1):

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (1)$$

sendo  $P = P(t)$  a população no instante  $t$ ,  $K$  a população máxima que o ambiente suporta e  $r$  a taxa de crescimento intrínseca do meio (DOMINGUES, SILVA e SÁ, 2020; BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2021; ASBEH, NOUPOUE e AWADALLA, 2021).

Sabe-se que o ponto de inflexão do modelo logístico ocorre quando a população atinge metade da população máxima, isto é, quando  $P(t) = K/2$ . Considerando que o valor de  $t$  associado ao ponto de inflexão seja  $t = \beta$ , tem-se a condição inicial  $P(\beta) = K/2$ . Agora, resolvendo a Equação (1), associada a essa condição inicial, chega-se ao modelo logístico dado pela Equação (2) (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2021; FENNER, LEVENE e LOIZOU, 2013; DENTAMARO, 2019; SILVA, LEITE e MELO, 2021).

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-\beta)}} \quad (2)$$

Este modelo apresenta uma única fase de crescimento, que se inicia mais lentamente, passa por período de rápido crescimento, até que, após o ponto de inflexão, tem sua taxa de crescimento reduzida, e passa a tender à estabilização no valor limite. Ele tem sido aplicado no estudo e modelagem de uma vasta lista de problemas biológicos, especialmente na dinâmica do crescimento de populações (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2021; KUCHARAVY e DEGUIO, 2015).

## 2.2 As quatro ondas de covid-19

Alguns fenômenos de crescimento mais complexos podem apresentar múltiplas fases logísticas, sendo modelados de maneira mais precisa por meio do somatório de modelos logísticos da forma da Equação (2). Nesse contexto, a análise a ser realizada revelará a presença de diversos pontos de inflexão, indicando transições significativas durante o processo de desenvolvimento do fenômeno modelado. A aplicação de abordagens que consideram essa complexidade pode proporcionar uma compreensão mais abrangente das dinâmicas subjacentes, permitindo uma descrição mais refinada das distintas etapas de crescimento em sistemas complexos (PARKHURST e MADER, 2000; FENNER, LEVENE e LOIZOU, 2013; UEM, 2020).

O estudo de Moura *et al.* (2022) aborda de maneira abrangente a evolução temporal da morbimortalidade relacionada à covid-19 e a cobertura vacinal, oferecendo informações importantes para a compreensão da dinâmica da pandemia. Os resultados destacam a presença de três ondas epidemiológicas no período de março de 2020 a maio de 2022, delineando a evolução temporal desses fenômenos. Os autores também ressaltam que a evolução da pandemia diferiu significativamente entre as regiões brasileiras, especialmente no que se refere aos momentos de ocorrência dos picos de óbitos.

De forma bem mais amena, com elevação no número de casos e pouca variação no número de óbitos, alguns pesquisadores consideram que no início de junho de 2022 (22ª SE do ano) o país iniciou uma quarta onda da doença (UFMG, 2022). Foram as três ondas

mencionadas em Moura *et al.* (2022), e a quarta onda indicada em UFMG (2022), que motivaram a utilização do modelo quadrilogístico (aquele com quatro fases de crescimento logístico) para o ajuste dos dados de toda a pandemia.

### 2.3 O modelo quadrilogístico

Obviamente, quando um fenômeno de crescimento apresenta várias fases de crescimento, pode ser que a utilização do modelo logístico mais simples, apresentado na Equação (2), não seja adequado. Por isso, Meyer (1994) apresenta a formalização matemática de um modelo que considera duas fases de crescimento logístico, denominado bilogístico. Essa formalização foi utilizada, com alguma adaptação, para modelar sistemas diversos, como quantificação da temperatura corporal de animais, dinâmica do número de inscrições em conferências, e, inclusive, para os dados iniciais da pandemia de covid-19 (PARKHURST e MADER, 2000; KEREK, PARKHURST e MADER, 2003; FENNER, LEVENE e LOIZOU, 2013; SILVA, LEITE e MELO, 2021). Poucos anos depois, Meyer, Yung e Ausubel (1999) apresentam a generalização desse tipo de modelo, que considera  $n$  fases de crescimento logístico, denominado multilogístico. Ele é dado pelo somatório de  $n$  modelos logísticos simples, como apresentado na Equação (3).

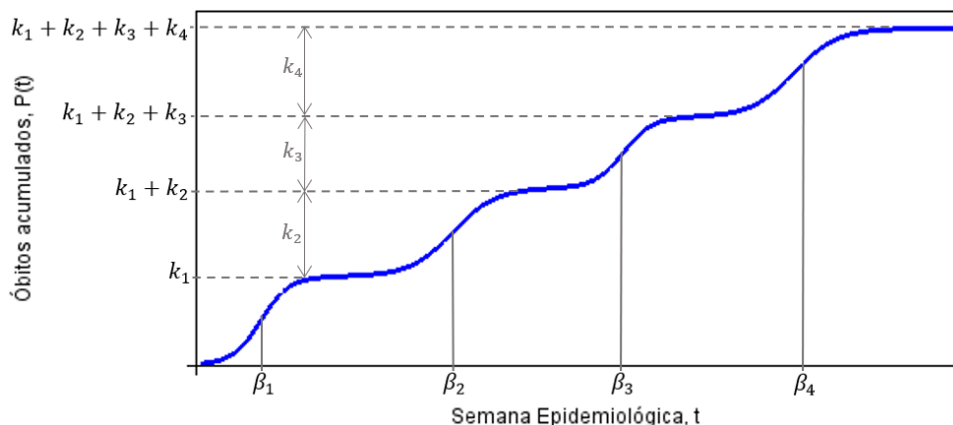
$$P(t) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{1 + e^{-r_i(t-\beta_i)}} \quad (3)$$

Com base na Equação (3), segue que o modelo quadrilogístico, ou seja, aquele com quatro fases de crescimento logístico, pode ser representado pela soma de quatro termos, como se observa na Equação (4):

$$P(t) = \frac{k_1}{1 + e^{-r_1(t-\beta_1)}} + \frac{k_2}{1 + e^{-r_2(t-\beta_2)}} + \frac{k_3}{1 + e^{-r_3(t-\beta_3)}} + \frac{k_4}{1 + e^{-r_4(t-\beta_4)}} \quad (4)$$

onde para  $1 \leq i \leq 4$ , para cada um dos períodos de crescimento logístico, tem-se que  $r_i$  são os valores referentes à taxa de crescimento;  $\beta_i$  os valores relativos de  $t$  em que ocorrem os pontos de inflexão; e  $k_i$ , os valores dos parâmetros associados a cada valor de equilíbrio. As representações dos parâmetros  $\beta_i$  e  $k_i$ , para o modelo quadrilogístico, estão na Figura 1.

Figura 1 – Representação prática dos parâmetros  $\beta_i$  e  $k_i$  no modelo quadrilogístico.



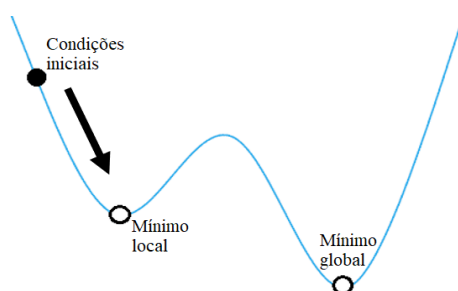
Devido às quatro ondas de covid-19 consideradas na pesquisa, a modelagem realizada visa determinar os valores dos 12 parâmetros do modelo da Equação (4), que minimizem o MAPE entre os valores reais de óbitos acumulados e as estimativas do modelo. A determinação desses valores foi feita pelo método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG2) de otimização.

#### 2.4 Método GRG2 para otimização dos parâmetros

O método GRG2, descrito por Lasdon *et al.* (1978), é um algoritmo heurístico, destinado à otimização de funções não lineares que sejam deriváveis, e é considerado um dos mais eficientes. Basicamente, o método analisa o gradiente ou a inclinação da função objetivo à medida que os valores de entrada (ou variáveis de decisão) mudam e determinam se uma solução ótima foi alcançada quando as derivadas parciais são iguais a zero (RODRIGUES, 2022).

Um fato a se destacar, e que pode ser uma desvantagem do método, é que se deve observar que a garantia de que ocorra convergência ao ponto ótimo é dependente de que as estimativas iniciais dos valores dos parâmetros (condições iniciais) sejam relativamente próximas do valor ótimo, pois, caso contrário, pode ser encontrado um mínimo local, e não global (GOMES *et al.*, 2017; RODRIGUES, 2022). A Figura 2 apresenta uma simples ilustração da posição do ponto encontrado pelas condições iniciais utilizadas e seu direcionamento para a solução ótima mais próxima, que pode não se referir ao mínimo global.

Figura 2 – Ilustração do direcionamento das soluções para um valor ótimo mais próximo.



Fonte: Adaptação de Engineer Excel.

Além de sua eficiência reconhecida, a utilização do GRG2 para determinar os valores ótimos dos parâmetros do modelo quadrilogístico para cada uma das regiões analisadas, é motivada por já estar implementado no pacote *Solver*, disponível no *software* Microsoft Excel®.

#### 2.5 Dados utilizados na otimização

Os dados utilizados para estimar as condições iniciais que alimentaram o modelo foram os números oficiais de óbitos acumulados disponíveis em arquivo do tipo .csv, obtidos no Painel Coronavírus do Ministério da Saúde, com a atualização dos dados até o fim do ano de 2023 (BRASIL, 2020a). No arquivo é possível filtrar os dados por regiões, estados e cidades, em função de cada SE.

As estimativas para as condições iniciais referentes aos parâmetros  $\beta_i$  e  $k_i$ , em todas as regiões analisadas foram obtidas por meio da observação cuidadosa dos gráficos de dispersão de óbitos acumulados em função da SE. Para determinar os valores de  $k_i$ , foi observada a região do gráfico onde os óbitos acumulados apresentavam comportamento próximo à tendência de estabilidade. Então, foram determinados os óbitos relativos a esses

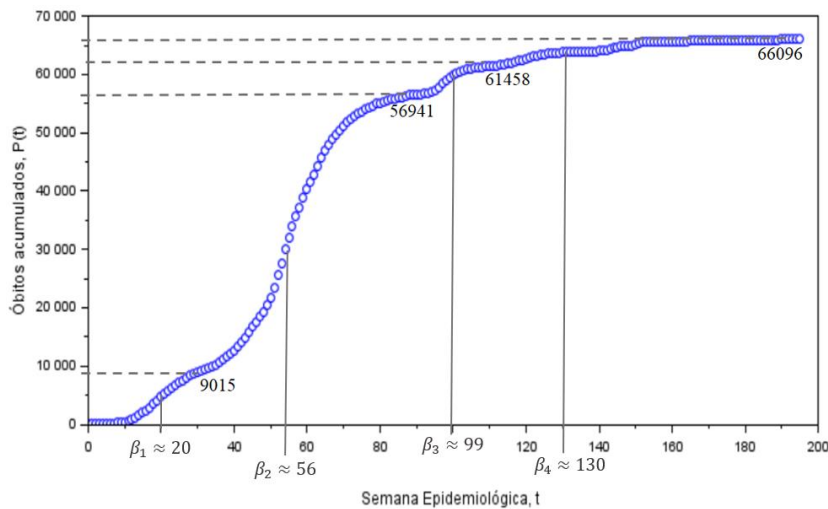
valores. Por exemplo, para MG, o valor  $k_1 \approx 9.015$  foi determinado pela observação ampliada do gráfico de dispersão, no qual se observa que, após a 30ª SE, cujo total de óbitos corresponde a 9.015, os pontos começam a crescer com uma taxa mais elevada, indicando o início de um novo período de crescimento logístico. Com raciocínio análogo, observa-se que os dois próximos valores no eixo  $P(t)$  em que ocorre tendência de estabilidade são  $P(t) = 56.941$  e  $P(t) = 61.458$ . Sendo assim, tem-se que  $k_1 + k_2 \approx 56.941$  e  $k_2 \approx 47.926$ , e além disso,  $k_1 + k_2 + k_3 \approx 61.458$ , permitindo determinar que  $k_3 \approx 4.517$ . O valor de  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$  foi considerado como o último número de óbitos acumulados em 2023, que se manteve igual a 66.096 óbitos nas duas últimas semanas do ano. Com isso, pode-se estimar que  $k_4 \approx 4.638$ .

Para as condições iniciais dos pontos de inflexão, as estimativas foram baseadas no fato já mencionado na seção 2.3, de que o ponto de inflexão do modelo logístico ocorre quando a população atinge metade da população máxima. Sendo assim, o ponto de inflexão para a primeira curva logística ocorre em  $(\beta_1, k_1/2)$ . Como  $k_1/2 = 4.507,5$  basta identificar na planilha de óbitos acumulados, qual é a semana aproximada em que esse valor ocorre. O resultado encontrado foi  $\beta_1 \approx 20$ . A estimativa para o segundo ponto de inflexão considerou que a segunda curva logística se inicia no final da primeira, ou seja, quando  $P(t) = 9.015$ . Sendo assim:

$$\Delta P(t) = 56.941 - 9.015 = 47.926$$

Portanto, o ponto médio dessa variação ocorre em  $9.015 + \Delta P(t)/2 = 32.978$ , e, de acordo com os dados da planilha, o valor de  $t$  associado a esse número é  $\beta_2 \approx 56$ . De forma análoga, as outras duas coordenadas  $\beta_i$  dos demais pontos de inflexão foram determinadas. Os valores encontrados foram  $\beta_3 \approx 99$  e  $\beta_4 \approx 130$ . O gráfico de dispersão, desde fevereiro de 2020 a dezembro de 2023, com as indicações dos valores aproximados dos parâmetros, para as quatro ondas consideradas, segue na Figura 3.

Figura 3 – Ilustração das condições iniciais utilizadas para o modelo de MG.



As taxas  $r_i$  foram estimadas com base na Equação (5), que é uma simples adaptação da forma de estimação apresentada em Bassanezzi (2006) e Boyce, Diprima e Meade (2021).

$$r_i = \frac{1}{\beta_i} \ln \left( \frac{K - P_0}{P_0} \right) \quad (5)$$

Na Equação (5) tem-se que  $P_0$  é o número de óbitos ao final da primeira SE com óbitos confirmados para cada região, e  $K_i$  é dado por

$$K_i = \sum_{j=1}^i k_j.$$

Para MG, por exemplo, tem-se  $P_0 = 6$ , ou seja, eram seis óbitos ao final da primeira SE com óbitos confirmados no estado. Então, os valores de  $r_i$  são calculados da seguinte forma:

$$r_1 = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{9.015 - 6}{6}\right) \approx 0,3657; \quad r_2 = \frac{1}{56} \ln\left(\frac{56.941 - 6}{6}\right) \approx 0,1635;$$

$$r_3 = \frac{1}{99} \ln\left(\frac{61.458 - 6}{6}\right) \approx 0,0933; \quad r_4 = \frac{1}{130} \ln\left(\frac{66.096 - 6}{6}\right) \approx 0,0716.$$

Os valores das condições iniciais utilizadas para alimentar o algoritmo do método GRG2 para modelar a evolução dos óbitos acumulados em todo o Brasil, e também nas cidades mineiras de Formiga e Divinópolis, foram encontrados exatamente da forma como descrito para determinação das condições iniciais em MG. A análise para as duas cidades mencionadas foi realizada com objetivo de verificar a hipótese levantada por Arantes, Castro e Domingues (2023), de que os dados de MG e de ambas as cidades devem se ajustar melhor a um modelo multilogístico do que a um logístico. Todos os valores das condições iniciais para as regiões analisadas seguem na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores das condições iniciais utilizadas para os parâmetros dos modelos quadrilogísticos em cada região analisada.

Parâmetros	Brasil	MG	Formiga	Divinópolis
$\beta_1$	19	20	24	22
$\beta_2$	58	56	44	56
$\beta_3$	101	99	58	97
$\beta_4$	141	130	111	139
$k_1$	168.989	9.015	29	80
$k_2$	451.982	47.926	110	582
$k_3$	49.398	4.517	134	48
$k_4$	38.269	4.638	62	58
$r_1$	0,4356	0,3657	0,0560	0,1142
$r_2$	0,1771	0,1635	0,0704	0,0838
$r_3$	0,1042	0,0933	0,0654	0,0491
$r_4$	0,0750	0,0716	0,0361	0,0349

As projeções de óbitos acumulados,  $P(t)$ , usando modelos quadrilogísticos, foram feitas considerando a Equação (4) e as condições iniciais apresentadas na Tabela 1. Em seguida, realizou-se o cálculo o MAPE, conforme a Equação (6):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - p_i}{y_i} \right| \quad (6)$$



sendo  $n$  o número de semanas com óbitos acumulados até 31 de dezembro de 2023,  $y_i$  o número de óbitos acumulados na semana  $i$  e  $p_i$  o número de óbitos acumulados previsto pelo modelo na semana  $i$ .

No estudo, com base nos dados coletados em Brasil (2020a), considerou-se que  $t = 1$  representa o fim da primeira SE em que se iniciaram os óbitos em cada região analisada. Então, em MG,  $t = 1$  corresponde ao fim da SE 14 do ano de 2020 (04/04/2020),  $t = 2$  ao fim da SE 15, também do ano de 2020 (11/04/2020), e assim sucessivamente até  $t = 196$ , que corresponde ao fim da SE 52 do ano de 2023 (31/12/2023). Logo, para MG, tem-se  $n = 196$ . Para o Brasil,  $t = 1$  corresponde ao fim da SE 12 do ano de 2020 (21/03/2020),  $t = 2$  ao fim da SE 13 de 2020 (28/03/2020), e vai até  $t = 198$ , para o fim da SE 52 do ano de 2023 (31/12/2023), o que implica que, para o país,  $n = 198$ . Para a cidade de Formiga,  $t = 1$  corresponde à SE 26 do ano de 2020, e vai até  $t = 184$ , referente à última semana de 2023, sendo, portanto, para essa cidade,  $n = 184$ . Em Divinópolis,  $t = 1$  corresponde à SE 15 do ano de 2020, e vai até  $t = 195$ , referente à última semana de 2023, sendo, portanto,  $n = 195$ .

Então, no pacote *Solver*, a técnica de resolução pelo método GRG2 foi utilizada, considerando que os valores das condições iniciais são células variáveis, e com a solicitação de minimização do valor do MAPE, utilizando as condições iniciais da Tabela 1. A minimização do somatório dos quadrados das diferenças entre os valores projetados e os reais também foi feita, mas como apresentou qualidade muito inferior aos resultados obtidos pela minimização do MAPE, apenas este será abordado.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após a otimização dos valores das condições iniciais pelo método GRG2, foram determinados os valores ótimos para os parâmetros, que estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores otimizados para os parâmetros dos modelos quadrilogísticos.

Parâmetros	Brasil	MG	Formiga	Divinópolis
$\beta_1$	15,74	19,97	6,63	20,13
$\beta_2$	56,34	55,93	43,53	57,47
$\beta_3$	90,42	97,44	53,23	104,46
$\beta_4$	135,70	140,1	115	118,82
$k_1$	143.121,3	8.505,6	12,41	60,70
$k_2$	427.056,4	45.951,1	58,56	577,64
$k_3$	95.258,3	8.315,5	202,99	65,04
$k_4$	40.763,6	3.155,8	65,94	69,26
$r_1$	0,5611	0,3277	0,4793	0,2959
$r_2$	0,1824	0,1657	0,8059	0,1530
$r_3$	0,1276	0,1190	0,1452	0,0724
$r_4$	0,0835	0,0965	0,0808	0,0466

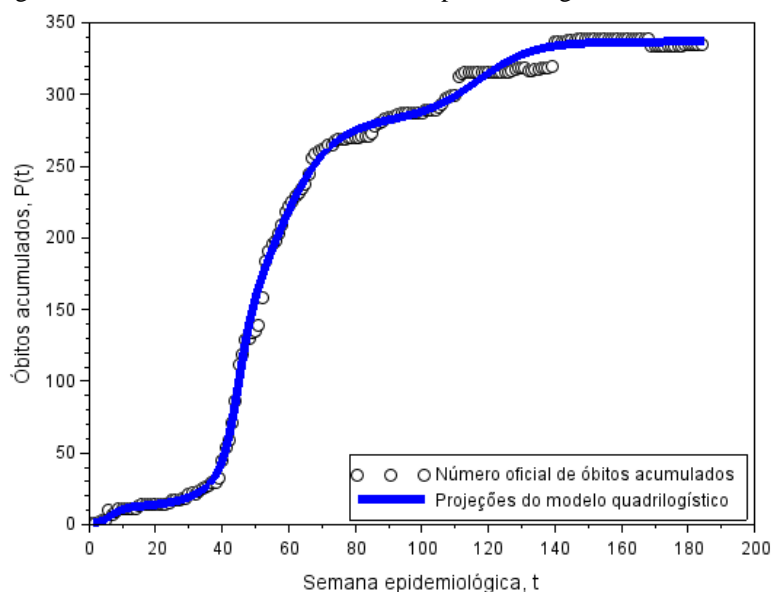
Sendo assim, os números de óbitos acumulados em cada região analisada foram modelados pela Equação (4), com a utilização dos parâmetros otimizados determinados.

#### 3.1 Dados utilizados na otimização

O gráfico de dispersão dos óbitos por SE, para Formiga, foi plotado juntamente com a curva que representa o modelo quadrilogístico determinado, e é apresentado na Figura 4. Para esta cidade, os dados reais de óbitos acumulados e as previsões do modelo quadrilogístico apresentam MAPE de apenas 2,99%, sendo que, com a retirada dos valores das duas piores previsões do modelo, cujos erros percentuais são de 45% e 36.4% (correspondentes às duas

primeiras SE) o MAPE cai para 2,57%. Ainda para esse modelo, o valor do coeficiente de determinação é alto,  $R^2 = 0,9986$ , indicando um ótimo ajuste linear entre os óbitos acumulados reais e as previsões obtidas.

Figura 4 – Curva do modelo determinado para Formiga e seus dados reais.



O modelo indica que o valor de estabilidade de óbitos da primeira onda é de cerca de 12 óbitos (valor de  $k_1$ ), e que isso ocorreu em  $t = 12$ , que representa a SE 37 de 2020, iniciada em 06/09/2020. Também indica que o valor máximo de óbitos da segunda onda ocorre em  $k_1 + k_2 \approx 71$ , próximo a  $t = 43$ , corresponde à SE 15 de 2021, encerrada em 17/04/2021. Para a estabilidade da terceira onda, o modelo indica um valor de  $k_1 + k_2 + k_3 \approx 274$  óbitos, ocorrendo aproximadamente em  $t = 81$ , equivalente à primeira SE de 2022, encerrada em 07/01/2022. A estabilidade da última fase logística ocorre em  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \approx 340$  óbitos, considerando o final do ano de 2023. O valor oficial dessa estabilidade, é de 335 óbitos, que implica que o resultado do modelo difere menos que 1,5% do oficial. Todas as projeções feitas pelo modelo são próximas dos valores oficiais obtidos em Brasil (2020a), mostrando a boa adaptabilidade do modelo quadrilogístico a esse conjunto de dados.

Ainda para Formiga, os resultados apontam para os possíveis pontos de inflexão do número de óbitos para cada fase de crescimento, que representam os instantes em que ocorrem mudança de concavidade nas curvas, passando à inicialização da fase de tendência de estabilidade de óbitos. Os valores encontrados para as fases um, dois, três e quatro, dados pelos valores dos parâmetros  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  e  $\beta_4$ , correspondem à 31ª SE de 2020 (fim de julho), à 15ª SE de 2021 (meados de abril), à 25ª SE de 2021 (segunda quinzena de junho) e à 31ª SE de 2022 (fim de julho).

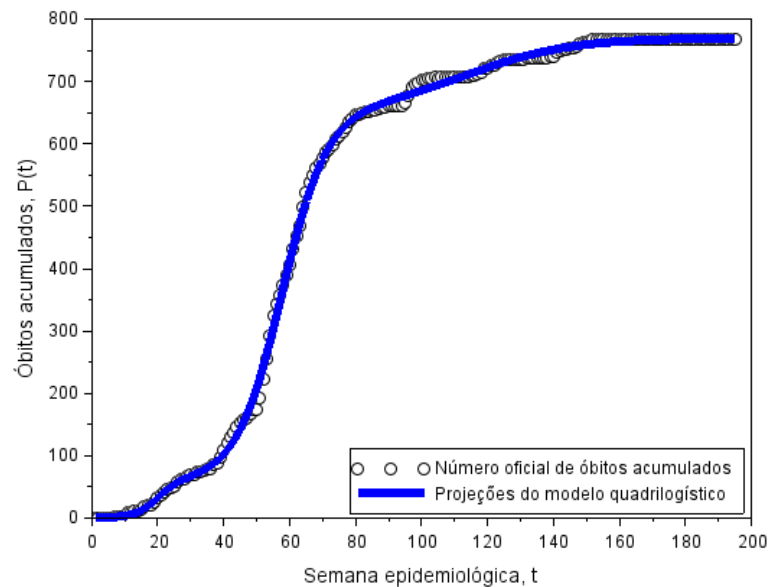
Para Divinópolis, a Figura 5 apresenta os dados reais e a curva do modelo quadrilogístico determinado. Os resultados encontrados para esta cidade mostram que o modelo apresenta ótima aproximação com os dados reais, visto que o MAPE obtido entre estes dados e as previsões realizadas foi de 3,46%.

Assim como feito para Formiga, a retirada dos dois resultados com maiores erros percentuais faz o MAPE cair para 2,96%. Além disso, também se observa relação linear muito forte entre os dados reais e as projeções do modelo, visto que  $R^2 = 0,9994$ .

O modelo determinado estima que os valores de equilíbrio de óbitos acumulados ao fim das fases de crescimento um, dois, três e quatro, são respectivamente iguais a 58, 648, 709 e 771, e aponta que os três primeiros valores de estabilidade ocorreram aproximadamente

para  $t$  igual a 26 (40<sup>a</sup> SE de 2020, fim de setembro), 81 (42<sup>a</sup> SE de 2021, meados de outubro) e 113 (22<sup>a</sup> SE de 2022, fim de maio).

Figura 5 – Curva do modelo determinado para Divinópolis e seus dados reais.

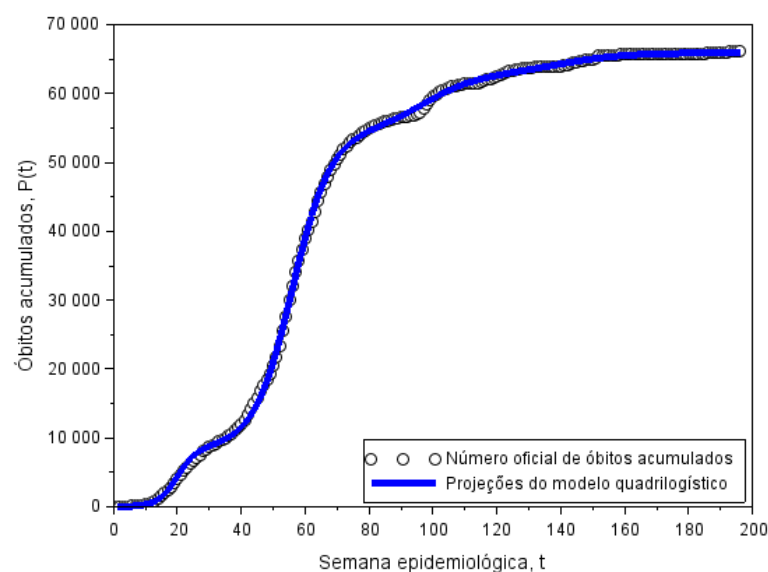


Ainda se observa que o equilíbrio de óbitos alcançado até o fim de 2023, igual a 767, como apresentado em Brasil (2020a), é praticamente igual ao projetado pelo modelo obtido, com diferença percentual de apenas 0,52%. Os pontos de inflexão determinados correspondem à 34<sup>a</sup> SE de 2020 (meados de agosto), 15<sup>a</sup> SE de 2021 (meados de abril), 7<sup>a</sup> SE de 2022 (meados de fevereiro) e à 29<sup>a</sup> SE de 2022 (segunda quinzena de julho).

### 3.2 Resultados para MG e o Brasil

Para o estado de MG e todo o Brasil, os gráficos de dispersão dos óbitos acumulados por SE, junto aos gráficos das curvas que representam os modelos quadrilogísticos encontrados, são disponibilizados nas Figuras 6 e 7.

Figura 6 – Curva do modelo determinado para MG e seus dados reais.



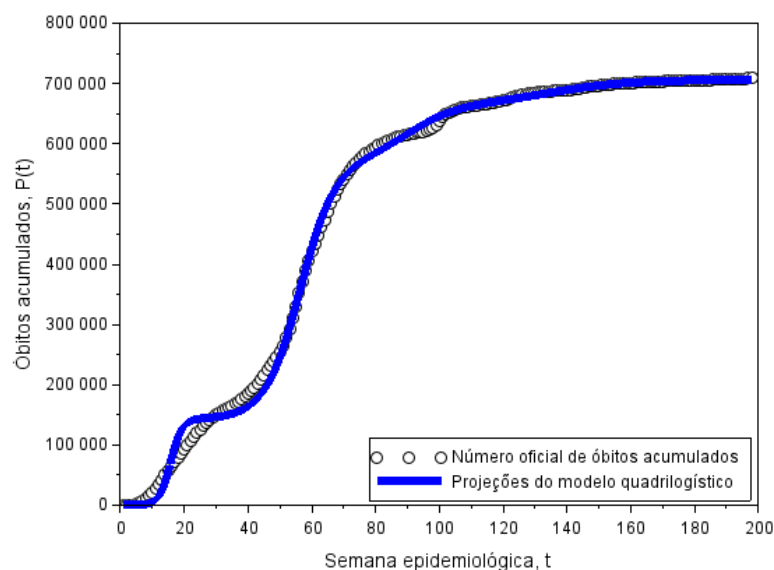
Para MG, com os resultados otimizados, o modelo apresenta um MAPE de 3,49%, sendo, portanto, muito próximo aos valores encontrados para Formiga em Divinópolis. Porém, as previsões iniciais para os dois primeiros valores de  $t$ , ou seja,  $t = 1$  e  $t = 2$ , são as únicas com alta diferença percentual entre os óbitos projetados e os reais. Ao se retirar esses dois únicos valores, o MAPE obtido é igual a apenas 1,75%, o menor percentual de erro das quatro regiões analisadas nesse trabalho. Esse modelo também foi o que apresentou maior coeficiente de determinação,  $R^2 = 0,9998$ , garantindo uma correlação linear muito forte entre as projeções e os dados reais.

Os resultados apontam que os valores aproximados de óbitos acumulados ao final de cada uma das quatro fases de crescimento são, respectivamente, iguais a 8506, 54457, 62772 e 65928. Os três primeiros, de acordo com o modelo, ocorrem para valores de  $t$  aproximadamente iguais a 29 (42ª SE de 2020, meados de outubro), 80 (40ª SE de 2021, início de outubro) e 120 (29ª SE de 2022, meados de julho). Já o valor de equilíbrio da última fase não foi alcançado, tendo projeção de um total de 65914 óbitos em 31/12/2023. Observe, ainda, que o valor de equilíbrio determinado pelo modelo para os óbitos acumulados até o fim de 2023 é um pouco menor do que o realmente observado nos dados reais considerados por Brasil (2020a), que foi de 66.096. Porém, o valor projetado é apenas 0.25% menor do que o oficial, mostrando que a projeção é coerente.

O modelo indica que em MG o ponto de inflexão da primeira fase de crescimento de óbitos ocorreu na 33ª SE de 2020 (meados de agosto), na 16ª SE de 2021 (terceira semana de abril) na segunda fase, na 6ª SE de 2022 na terceira fase (meados de fevereiro) e na quarta e última fase, na 51ª SE de 2022 (perto da última semana de dezembro).

Os resultados para o modelo do Brasil geram um bom ajuste, com MAPE de 8.28% considerando todos os dados. Porém, diferentemente do que ocorreu nas demais regiões estudadas, o modelo não se ajustou adequadamente a vários pontos iniciais. Foram cerca de 13 pontos mal ajustados, de  $t = 1$  a  $t = 13$ , do total de 198 utilizados na modelagem. Desconsiderando esses pontos, o MAPE fica ainda melhor, e cai para 3.28%, ou seja, a partir de  $t = 14$  (25ª SE de 2020) o ajuste do modelo se torna ainda mais eficiente.

Figura 7 – Curva do modelo determinado para o Brasil e seus dados reais.



Acredita-se que essa dificuldade de ajuste para os valores dos dados iniciais se deve ao fato do Brasil, diferentemente de MG e das duas cidades mineiras analisadas, é uma junção de regiões com formas muito discrepantes de evolução da doença e dos picos de óbitos (MOURA *et al.*, 2022). Independente disso, tem-se coeficiente de determinação alto,  $R^2 = 0,9991$ , também contribuindo para a consideração de que o ajuste quadrilogístico apresenta correlação linear muito forte com os dados reais de óbitos.

Os números de equilíbrio de óbitos acumulados para cada uma das quatro fases de crescimento para o Brasil, segundo o modelo determinado, são iguais a 143.121, 570.178, 665.436 e 706.200. Os três primeiros ocorrendo em valores de  $t$  próximos a 24 (35<sup>a</sup> SE de 2020, fim de agosto), 86 (44<sup>a</sup> SE de 2021, início de novembro) e 113 (19<sup>a</sup> SE de 2022, meados de maio). De acordo com o modelo determinado, cada fase possui seu respectivo ponto de inflexão, que ocorrem perto da 26<sup>a</sup> SE de 2020 (final de junho), com cerca de 71.829 óbitos acumulados; da 14<sup>a</sup> SE de 2021 (meados de abril), onde já eram cerca de 357.919 óbitos; da 48<sup>a</sup> SE de 2021 (início de dezembro), com projeção de 617.865 mortes acumuladas; e o último ponto de inflexão, ocorrido perto da 52<sup>a</sup> SE de 2022 (final de dezembro).

Os resultados obtidos nesta análise demonstram bons ajustes para os números de óbitos acumulados por covid-19, em todo o período pandêmico, por meio de modelos quadrilogísticos, com baixos valores de MAPE e fortes correlações lineares. Eles estão em linha com estudos anteriores, como os de Dattoli *et al.* (2020), Wu *et al.* (2020), Mandieta *et al.* (2020), Assis e Carvalho (2020), Figueiredo *et al.* (2020), Uba *et al.* (2020) e Valle (2020), que usaram modelos mais simples para ajustar os dados dos números de casos e óbitos, mas que não capturaram as várias fases de crescimento dos óbitos, pois foram realizados por períodos de poucos dias ou meses. A qualidade dos ajustes encontrados também é coerente com os resultados dos trabalhos de Silva, Leite e Melo (2021) e Calatayud, Jornet e Mateu (2022), ambos para períodos inferiores a um ano, e que também utilizam modelos com múltiplas fases de crescimento. Essas comparações indicam que, independentemente do período de análise e da abordagem metodológica, modelos matemáticos bem parametrizados, como os modelos quadrilogísticos, são eficazes na representação dos dados de óbitos acumulados por covid-19.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa propôs a modelagem do número de óbitos acumulados desde o início da pandemia de covid-19 até o fim do ano de 2023. Foram consideradas quatro ondas de crescimento de óbitos, e o modelo utilizado foi o quadrilogístico, que considera quatro fases de crescimento logístico. A análise realizada foi referente a todo o Brasil, a MG e duas de suas cidades, Formiga e Divinópolis. As condições iniciais utilizadas para alimentar o modelo foram baseadas em dados oficiais do Ministério da Saúde, que posteriormente foram otimizados pelo método GRG2.

Os resultados revelaram modelos com elevado coeficiente de determinação e baixo MAPE, corroborando o que foi sugerido por Arantes, Castro e Domingues (2023), de que o modelo com múltiplas fases de crescimento logístico deveria se adequar melhor aos dados dessas regiões do que o modelo logístico simples. Além disso, os valores de  $R^2$  e MAPE, encontrados para os modelos determinados, são coerentes, ou até melhores, em alguns casos, que os das referências mencionadas, mesmo que nesta pesquisa a base de dados utilizada seja muito maior. Isso reafirma que o modelo quadrilogístico é adequado para esse tipo de modelagem, garantindo bons ajustes e a capacidade de capturar a dinâmica do crescimento dos óbitos acumulados em todo o período da pandemia, evidenciando grande concordância com os momentos cruciais associados aos pontos de inflexão e de equilíbrio de óbitos em cada fase logística de crescimento.

Obviamente, é importante ressaltar que o fato de terem sido consideradas quatro ondas até o fim de 2023, não implica que novas ondas não possam ocorrer nos anos seguintes, gerando novas fases de crescimento de óbitos.

Finalmente, devido à capacidade que o modelo quadrilogístico possui de capturar diferentes fases de crescimento e estabilidade, esse tipo de modelo pode ser aplicado em diversas áreas. Na demografia e urbanismo, por exemplo, pode ser útil para previsões de crescimento populacional de cidades que estejam em diferentes fases de desenvolvimento, podendo auxiliar no planejamento da infraestrutura urbana. Para apoiar no entendimento da dinâmica de propagação de doenças infecciosas com múltiplas ondas, esse tipo de modelo também pode ser utilizado em epidemiologia. Em estudos ambientais sua utilização pode ser importante na projeção de populações de espécies que possuem ciclos de declínio e crescimento influenciados por fatores sazonais ou impactos ecológicos. Outra possível aplicação é na economia, para análise de crescimento de mercados de produtos que seguem fases de crescimento que passam por períodos de saturação e estabilidade.

## 5. REFERÊNCIAS

ARANTES, M. C.; CASTRO, G. F.; DOMINGUES, J. S. Análise matemática da evolução da covid-19 em Minas Gerais e algumas cidades por modelos de crescimento logístico. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA E INOVAÇÃO (SemPI), v.1, 2023, Formiga. **Anais...** Formiga: IFMG – *Campus Formiga*, 2023.

ASBEH, K. A.; NOUPOUE, Y. Y. Y.; AWADALLA, M. Psi-Caputo Logistic Population Growth Model. **Journal of Mathematics**, v.2021, ID. 8634280, 2021. <https://doi.org/10.1155/2021/8634280>

ASSIS, A. S.; CARVALHO, V. W. Logistic Approach to COVID - 19 Epidemic Evolution in Brazil. **Open Access Library Journal**, v.7, n.8, e6600, p.1-18, 2020.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006. 392p.

BITAR, R. **Há um ano SP vacinava 1ª pessoa contra covid no Brasil**. G1 São Paulo, 2022. Disponível em: <<https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2022/01/17/ha-um-ano-sp-vacinava-1a-pessoa-contra-covid-no-brasil-veja-o-que-mudou-e-projecoes-para-o-futuro.ghtml>>. Acesso em: 10 jun. 2024.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C.; MEADE, D.B. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 12. ed. Wiley, 2021. 640p.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Base de dados do Sistema Único de Saúde sobre a covid-19**. Brasília, 2020a. Disponível em: <<https://COVID.saude.gov.br>>. Acesso em: 1 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde - SCTIE. **Diretrizes para diagnóstico e tratamento da covid-19**. Brasília, 2020b. Disponível em: <<https://sbim.org.br/images/files/notas-tecnicas/ddt-covid-19-200407.pdf>>. Acesso em: 5 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Portaria Nº 188, de 3 de fevereiro de 2020**. Brasília, 2020c. Disponível em:

<[https://bvsms.saude.gov.br/bvs/saudelegis/gm/2020/prt0188\\_04\\_02\\_2020.html](https://bvsms.saude.gov.br/bvs/saudelegis/gm/2020/prt0188_04_02_2020.html)>. Acesso em: 5 jan. 2024.

BRASIL. Ministério da Saúde. DataSUS. **Estimativas de 1992 a 2021 utilizadas pelo TCU para determinação das cotas do FPM (sem sexo e faixa etária)**. Brasília, 2021. Disponível em: <<http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/deftohtm.exe?ibge/cnv/poptbr.def>>. Acesso em: 5 abr. 2024.

CALATAYUD, J.; JORNET, M.; MATEU, J. A stochastic Bayesian bootstrapping model for covid-19 data. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, v.36, p.2907-2917, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00477-022-02170-w>

CDC. **COVID Data Tracker**. Centers for Disease Control and Prevention, 2023. Disponível em: <<https://covid.cdc.gov/covid-data-tracker/#deaths-landing>>. Acesso em: 1 abr. 2024.

CHARLIE YOUNG, P. E. **Excel Solver: Which Solving Method Should I Choose?**. EngineerExcel, 2024. Disponível em: <https://engineerexcel.com/excel-solver-solving-method-choose/>.

CYRANOSKI, D. What China's coronavirus response can teach the rest of the world. **Nature**, v. 579, n.7800, p.479-480, 2020. <https://www.nature.com/articles/d41586-020-00741-x>

DATTOLI, G. *et al.* Note on the Evolution of Covid-19 in Italy. **arXiv**, 2020. <https://arxiv.org/abs/2003.08684>

DENTAMARO, Alex Alves. **Estudo da evolução de modelos de crescimento populacional e métodos para obtenção de parâmetros**. 2019. Dissertação (Mestrado). 124 f. Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, 2019.

DOMINGUES, J. S.; SILVA, B. M.; SÁ, D. L. População de Formiga-MG ajustada pelo modelo exponencial assintótico e sua comparação com os modelos clássicos de Gompertz e logístico. **Biomatemática**, v.30, p.39-54, 2020. [https://www.ime.unicamp.br/~biomat/Bio30\\_art2.pdf](https://www.ime.unicamp.br/~biomat/Bio30_art2.pdf)

DOMINGUES, J. S. Modelagem matemática das curvas de estatura e peso de indivíduos com síndrome de Down. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v.8, n.3, p.34-56, 2023. <https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/17965>

FENNER, T.; LEVENE, M.; LOIZOU, G. A bi-logistic growth model for conference registration with an early bird deadline. **Central European Journal of Physics**, v.11, n.7, p.904-909, 2013. <https://link.springer.com/article/10.2478/s11534-013-0275-4>

FIGUEIREDO, M. P. S. de; SANTOS, A. L. P. dos; FERREIRA, T. A. E.; QUEIROZ, M. P. L. J. de. Long-Term Time Prediction of Cumulative Number of Deaths in Brazil, China, Germany, Italy, Spain, the United States: an application to COVID-19 S-shaped models. **Research, Society and Development**, v.9, n.8, e749986565, 2020. <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i8.6565>

GOMES, F. M.; PEREIRA, F. M.; MARINS, F. A. S.; SILVA, M. B. Estudo comparativo entre os métodos gradiente reduzido generalizado e algoritmo genético em otimização com

múltiplas respostas. **Revista Produção Online**, v. 17, n.2, p.592-619, 2017. <https://www.producaoonline.org.br/rpo/article/view/2566>

HAO, Y. J. *et al.* The origins of COVID-19 pandemic: A brief overview. **Transboundary and Emerging Diseases**, v.69, n.3, p.1-17, 2022. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/tbed.14732>

KUCHARAVY, D.; DEGUIO, R. Application of Logistic Growth Curve. **Procedia Engineering**, v. 131, p. 280-290, 2015. <https://www.sciencedirect.com/journal/procedia-engineering/vol/131/suppl/C>

LASDON, L. S. *et al.* Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming. **ACM Transactions on Mathematical Software**, v.4, n.1, p.34-50, 1978. <https://dl.acm.org/doi/10.1145/355769.355773>

LIU, Y.; KUO, R.; SHIH, S. COVID-19: The first documented coronavirus pandemic in history. **Biomedical Journal**, v. 43, n.4, p.328-333, 2020. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2319417020300445>

MATRAVOLGYI, E.; ANDRADE, H. **Brasil já vacinou 70% da população com duas doses ou dose única contra covid-19**. CNN Brasil, 2022. Disponível em: <<https://www.cnnbrasil.com.br/saude/brasil-ja-vacinou-70-da-populacao-com-duas-doses-ou-dose-unica-contra-covid-19/>>. Acesso em: 10 mar. 2024.

MENDIETA, J. F. M. *et al.* Estudio sobre modelos predictivos para la COVID-19 en Cuba. **Medisur: Revista de Ciencias Médicas en Cienfuegos**, v.18, n.3, p.431-442, 2020. <http://scielo.sld.cu/pdf/ms/v18n3/1727-897X-ms-18-03-431.pdf>

MEYER, P. S. Bi-logistic growth. **Technological Forecasting and Social Change**, v.47, n.1, p.89-102, 1994. <https://www.sciencedirect.com/journal/technological-forecasting-and-social-change/vol/47/issue/1>

MEYER, P. S.; YUNG, J. W.; AUSUBEL, J. H. A primer on logistic growth and substitution: the mathematics of the loglet lab software. **Technological Forecasting and Social Change**, v.61, n.3, p.247-2271, 1999. <https://www.sciencedirect.com/journal/technological-forecasting-and-social-change/vol/47/issue/1>

MOURA, E. C. *et al.* Covid-19: temporal evolution and immunization in the three epidemiological waves, Brazil, 2020–2022. **Rev Saude Publica**, v.56, n.105, p.1-11, 2022. <https://doi.org/10.11606/s1518-8787.2022056004907>

OLIVEIRA, Jaciele de Jesus. **Modelos SIR e algoritmos tipo ensemble com aplicações a COVID-19**. 2022. Dissertação (Mestrado). 75 f. Pós-Graduação em Estatística, Universidade Federal de Pernambuco, 2022.

PARKHURST, A. M.; MADER, T. L. Using nonlinear growth curves to estimate heat stress in processing feedlot cattle. **Conference on Applied Statistics in Agriculture**. Manhattan, Kansas, Kansas State University, 2000. <https://doi.org/10.4148/2475-7772.1244>



KEREK, M.; PARKHURST, A. M.; MADER, T. L. Using the bi-logistic model to estimate body temperature in feedlot cattle. **Conference on Applied Statistics in Agriculture**. Manhattan, Kansas, Kansas State University, 2003. <https://doi.org/10.4148/2475-7772.1186>

RODRIGUES, Luís Pedro Moreira. **Otimização da forma de estruturas reticuladas**. 2022. Dissertação (Mestrado). 111 f. Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade do Porto, 2022.

SILVA, E. V. da; MELO, J. da S.; LEITE, M. A. Modelo bi-logístico aplicado aos primeiros 1015 casos de COVID-19 em indígenas do Estado do Amapá e norte do Pará. **Science and Knowledge in Focus**, v.3, n.2, p.77-88, 2021. <https://periodicos.unifap.br/index.php/scienceinfocus>

SPITERI, G. *et al.* First cases of coronavirus disease 2019 (COVID-19) in the WHO European Region, 24 January to 21 February 2020. **Euro Surveill**, v.25, n.9, p.1-6, 2020. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7068164/>

GAGLIARDI, J. **Number of new coronavirus (COVID-19) deaths in Europe since February 2020 (as of January 13, 2023), by date of report**. STATISTA, 2023. Disponível em: <<https://www.statista.com/statistics/1102288/coronavirus-deaths-development-europe/>>. Acesso em: 5 abr. 2024.

UBA, G. *et al.* Prediction of cumulative death cases in Brazil due to covid-19 using mathematical models. **Bulletin of environmental science & sustainable management**, v.4, n.1, p.13-19, 2020. <https://doi.org/10.54987/bessm.v4i1.527>

UEM. Universidade Estadual de Maringá. **Modelos Epidêmicos**. ComplexLab, 2020. Disponível em: <[http://complex.pfi.uem.br/covid\\_modelos/](http://complex.pfi.uem.br/covid_modelos/)>. Acesso em: 5 jan. 2024.

UFMG. Universidade Federal de Minas Gerais. **Quarta onda de Covid-19 está chegando ao Brasil?** Belo Horizonte: UFMG, 2022. Disponível em: <<https://ufmg.br/comunicacao/noticias/quarta-onda-da-covid-19-esta-chegando-ao-brasil>>. Acesso em: 10 mai. 2024.

VALLE, J. A. M. Predicting the number of total covid-19 cases and deaths in Brazil by the Gompertz model. **Nonlinear Dynamics**. v.102, p.2951-2957, 2020. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06056-w>

WORDMETERS. **United States COVID**. Worldometer COVID-19 Data: Coronavirus Statistics, 2023. Disponível em: <<https://www.worldometers.info/coronavirus/country/us/>>. Acesso em: 12 mai. 2024.

WU, K. *et al.* Generalized logistic growth modeling of the covid-19 outbreak: comparing the dynamics in the 29 provinces in China and in the rest of the world. **Nonlinear Dynamics**. v.101, p.1561-1581, 2020. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05862-6>



O conteúdo deste trabalho pode ser usado sob os termos da licença Creative Commons Attribution 4.0. Qualquer outra distribuição deste trabalho deve manter a atribuição ao(s) autor(es) e o título do trabalho, citação da revista e DOI.