

## Desenvolvimento de código aberto em Octave para ajustes de funções através de linearização e MMQ

### Open source development in Octave for function adjustments through linearization and OLS

<sup>1</sup>Daniel Magalhães da Cruz, <sup>2</sup>Ignacio Melito, <sup>3</sup>Aleones José da Cruz Júnior, <sup>4</sup>Marcel Willian Reis Sales, <sup>5</sup>Tales Luiz Popiolek Júnior, <sup>6</sup>Carlos Eduardo Marcos Guilherme

<sup>1</sup>Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) (daniel.cruz@ufrgs.br)

<sup>2</sup>Bacharel em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande (FURG) (ignaciomelito@yahoo.com.br)

<sup>3</sup>Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Geotecnia (PPG) – Universidade de Brasília (UnB) & Professor EBTT – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano (IF Goiano) (aleones.junior@ifgoiano.edu.br)

<sup>4</sup>Doutor em Estruturas e Construção Civil – Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) & Professor EBTT – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano (IF Goiano) (marcel.sales@ifgoiano.edu.br)

<sup>5</sup>Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPMec) – Universidade Federal do Rio Grande (FURG) (talespopiolekjr@furg.br)

<sup>6</sup>Doutor em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) & Professor Magistério Superior – Universidade Federal do Rio Grande (FURG) (carlosguilherme@furg.br)

---

**RESUMO:** Todos os estudos de engenharia recorrem a bases matemáticas para sua realização, sejam elas da probabilidade, da estatística, do cálculo diferencial e integral, da álgebra vetorial, etc. Fato é que a abordagem matemática é parte crucial do desenvolvimento. Nos estudos que lidam com dados discretos, é evidente a necessidade de parametrizações que demonstrem o comportamento de tal conjunto de dados, tornando o ajuste de curva imprescindível. Nesse sentido, destaca-se o contexto amplo do trabalho, que pretende escrever um código em Octave para parametrização de dados discretos. A metodologia implementada é o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), bem como a sua avaliação quantitativa de qualidade feita através do coeficiente de correlação ( $R^2$ ). Além disso, recursos matemáticos de linearização de modelos são utilizados para posterior adequação no MMQ. Como resultado, obtém-se um código em Octave que realiza a parametrização para os modelos: linear, de potência, exponencial, recíproca e Michaelis-Menten. O código é verificado com diferentes resultados da literatura. Como conclusão, observa-se a facilidade do script em Octave, que não apenas permite a parametrização e ajuste de curva para conjuntos de dados, mas também fornece base para inserção de demais modelos dentro do script. Além disso, o código desenvolvido conduz a novas proposições, como programas que façam algo de forma similar para 3D, ou mesmo programas que realizem cálculos de forma automatizada.

**Palavras Chave:** Ajuste de curvas. Dados discretos. Linearização. Parametrização. Método dos Mínimos Quadrados. Descrição matemática.

**ABSTRACT:** All engineering studies rely on mathematical foundations for their realization, whether they involve probability, statistics, differential and integral calculus, vector algebra, etc. The mathematical approach is indeed a crucial part of the development process. In studies dealing with discrete data, the need for parameterizations that demonstrate the behavior of such data sets is evident, making curve fitting indispensable. In this regard, the broad context of the work stands out, aiming to write code in Octave for the parameterization of discrete data. The implemented methodology is the Ordinary of Least Squares (OLS), as well as its quantitative evaluation of quality through the coefficient of correlation ( $R^2$ ). Additionally, mathematical resources for linearizing models are used for subsequent adaptation in OLS. As a result, an Octave code is obtained that performs parameterization for the following models: linear, power, exponential, reciprocal, and Michaelis-Menten. The code is validated with various results from the literature. In conclusion, the ease of the Octave script is observed, not only enabling parameterization and curve fitting for data sets but also providing a basis for the insertion of additional models within the script. Furthermore, the developed code leads to new propositions, such as programs that perform similar tasks in 3D, or even programs that automate calculations.

**Keywords:** Curve fitting. Discrete data. Linearization. Parameterization. Method of Least Squares. Mathematical description.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de software de código aberto desempenha um papel crucial na democratização do conhecimento e na promoção do compartilhamento de tecnologia em diversas áreas do conhecimento (SHAH, 2006; DIZON, 2009; FINGERHUTH; BABEJ; WITTEK, 2018; KATZIN *et al.*, 2020). Entre as ferramentas que se destacam nesse contexto, está o Octave, um ambiente de programação de alto nível voltado para a resolução numérica de problemas, semelhante ao popular MATLAB®. Através do Octave, é possível realizar diversas tarefas de análise numérica e modelagem matemática, o que o torna uma escolha ideal para estudantes, pesquisadores e profissionais que buscam soluções eficientes e de código aberto em software gratuito.

Neste artigo, explora-se o desenvolvimento em código aberto em Octave, com foco na realização de ajustes de funções de linearização utilizando o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). A técnica MMQ é amplamente utilizada na estatística e em diversas áreas da ciência e engenharia (FARIAS; RODRIGUES; PEREZ, 2019; SOUZA; OLIVEIRA; OZONUR, 2019; CARDOSO *et al.*, 2019; PAULINO *et al.*, 2019; DIAS; SILVA, 2021; RIES *et al.*, 2023), permitindo que dados experimentais sejam ajustados a uma função matemática que melhor representa o comportamento dos dados. Isso é particularmente útil em situações em que é necessário modelar relações lineares entre variáveis, como em regressões lineares, além de ser uma ferramenta poderosa na análise de incertezas e na estimativa de parâmetros desconhecidos (QUARTERONI; SALERI, 2007; BRANDT; BURAK; KLÜBER, 2016; BRASIL; BALTHAZAR; GÓIS, 2015).

O objetivo deste trabalho é apresentar um conjunto de ferramentas de software de código aberto desenvolvidas para o Octave, permitindo a realização de ajustes de funções por meio do MMQ. O desenvolvimento de tais ferramentas oferece inúmeras vantagens, pois não apenas possibilita a personalização do processo de ajuste de curvas, mas também permite que a comunidade de usuários participe ativamente do aprimoramento contínuo das técnicas de ajuste disponíveis, podendo reimplementar o código.

Ao longo deste artigo, aborda-se os fundamentos teóricos do MMQ e como ele pode ser aplicado para realizar ajustes de funções associadas à linearização. Serão abordados os ajustes: linear, de potência, exponencial, recíproco e Michelis-Menten. Explora-se também a estrutura do Octave e a forma como o desenvolvimento de software de código aberto é incentivado e (re)implementável.

Outro ponto relevante deste trabalho é o compartilhamento de exemplos práticos de como utilizar o software desenvolvido. Para ilustrar a eficácia do MMQ acoplada a linearização feita no Octave, realiza-se ajustes de funções lineares a partir de conjuntos de dados reais existentes na literatura, onde compara-se o resultado obtido pelo presente estudo com a referência. Assim diferentes dados de diferentes nichos podem ser abordados, destacando a importância do ajuste adequado de curvas em contextos científicos gerais.

Ao promover a utilização de software de código aberto para a realização de ajustes de funções de linearização, espera-se incentivar a adoção de práticas de pesquisa e desenvolvimento mais colaborativas, transparentes e acessíveis. A disseminação do conhecimento através do compartilhamento de código e ferramentas abertas contribui para o avanço da ciência como um todo, permitindo que pesquisadores e estudantes tenham acesso às mesmas soluções e possam contribuir para o aprimoramento constante dessas tecnologias (DIZON, 2009; CABALLERO-RIVERO; SÁNCHEZ-TARRAGÓ; SANTOS, 2019; IACONO; NAGANO, 2019; ROSA; SILVA; PAVÃO, 2021).

Em resumo, este artigo visa mostrar como o desenvolvimento de software de código aberto no Octave pode ser uma abordagem poderosa e vantajosa para a realização de ajustes de funções de linearização através do MMQ. Compartilhando conhecimento, incentivando a

colaboração e fornecendo ferramentas eficientes espera-se impulsionar ainda mais o progresso científico e tecnológico, permitindo que mais pessoas possam utilizar e contribuir para o desenvolvimento de soluções avançadas nesse campo tão importante da análise de dados e modelagem matemática, podendo reimplementar o código para outros modelos a partir da estrutura base aqui apresentada.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

O Método dos Mínimos Quadrados é uma técnica amplamente utilizada na análise de dados e no ajuste de modelos matemáticos para conjuntos experimentais. Ele desempenha um papel crucial em várias áreas da ciência e pode ser encontrado em diversos trabalhos de diferentes grandes áreas do conhecimento, incluindo física (BRANDÃO; ARAUJO; VEIT, 2019; MONTOLI; CABRAL NETO, 2020), engenharia (FARIAS; RODRIGUES; PEREZ, 2019; SOUZA; OLIVEIRA; OZONUR, 2019; RIES *et al.*, 2023; RUSCH *et al.*, 2020; COUTO *et al.*, 2020; SILVA *et al.*, 2023), economia (SALOMÃO NETO; SILVA, 2019; MALANSKI; MEINERS; SANTOS, 2020; LEÃO *et al.*, 2020) e ciências sociais (CORREA JUNIOR; TREVISAN; MELLO, 2019; PAULA; UHR; SANTOS, 2023). O MMQ busca encontrar os parâmetros de um modelo que minimizam a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo. Isso é alcançado através da resolução de equações matemáticas que levam em consideração o erro associado às medições. O desenvolvimento básico da formulação do MMQ é mostrado abaixo conforme a literatura (BRASIL; BALTHAZAR; GÓIS, 2015; ÁVILA, 2000).

Suponha que se tenha um conjunto de dados experimentais representados por pares ordenados  $(x_i, y_i)$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n$ . A intenção é ajustar um modelo linear a esses dados, que pode ser representado como mostrado na Equação 1.

$$y = m \cdot x + b \quad (1)$$

onde  $y$  é a variável dependente,  $x$  é a variável independente,  $m$  é a inclinação da reta, e  $b$  a interseção no eixo  $y$ . O objetivo é encontrar os valores de  $m$  e  $b$  que minimizam a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados  $y_i$  e os valores previstos  $y'_i$  (calculados pela equação do modelo), Equação 2.

$$\min \Sigma (y_i - y'_i)^2 \quad (2)$$

Combinando a Equação 1, a Equação 2 é reescrita como mostrado na Equação 3.

$$\min \Sigma (y_i - m \cdot x_i - b)^2 \quad (3)$$

Para encontrar os valores de  $m$  e  $b$  que minimizam a soma dos quadrados das diferenças, deriva-se parcialmente a expressão acima em relação a  $m$  e  $b$ , e iguala-se as derivadas a zero, Equações 4 e 5 respectivamente.

$$\frac{\partial}{\partial m} \Sigma (y_i - m \cdot x_i - b)^2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \Sigma (y_i - m \cdot x_i - b)^2 = 0 \quad (5)$$

Simplificando as equações e resolvendo para  $m$  e  $b$ , obtêm-se as fórmulas de ajuste, Equação 6 e Equação 7. Onde  $n$  é o número de pontos de dados,  $\bar{x}$  é a média dos valores  $x_i$  e  $\bar{y}$  é a média dos valores  $y_i$ .

$$m = \frac{\Sigma x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad (6)$$

$$b = \bar{y} - m \bar{x} \quad (7)$$

O MMQ não se limita apenas a modelos lineares. Pode ser estendido para ajustar modelos não-lineares, como polinômios de grau superior ou exponenciais. Para modelos não-lineares, a função objetivo que se deseja minimizar não será mais uma expressão simples e linear. Portanto, os parâmetros do modelo não podem ser obtidos diretamente através de derivadas simples. Nesses casos, métodos iterativos, como o método de Gauss-Newton, são frequentemente empregados para encontrar os parâmetros que minimizam a função objetivo (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008). Outro método (quando possível), é transformar expressões não lineares em expressões lineares, assim trabalha-se com o MMQ e depois retorna-se a expressão original operando de forma a inverter as transformações realizada (GUIMARÃES, 2001).

Para este trabalho, propõem-se a trabalhar com os modelos: linear, de potência, exponencial, recíproca e Michaelis-Menten, que constam na Tabela 1 em sua forma original, e quando pertinente em sua expressão linearizada.

Tabela 1 – Modelos utilizados e suas linearizações.

Modelo	Equação	
	Forma Não-Linear	Forma Linear
Linear		$y = B + A \cdot x$
Potência	$y = B \cdot x^A$	$\ln y = \ln B + A \cdot \ln x$
Exponencial	$y = B \cdot e^{A \cdot x}$	$\ln y = \ln B + A \cdot x$
Recíproca	$y = \frac{1}{B + A \cdot x}$	$\frac{1}{y} = B + A \cdot x$
Michaelis-Menten	$y = \frac{A \cdot x}{B + x}$	$\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{B}{A \cdot x}$

Embora não abordado no script desenvolvido em Octave, é importante falar sobre o conceito de MMQ ponderado. Em experimentos reais, os valores medidos geralmente têm incertezas associadas. O MMQ pode ser estendido para lidar com essas incertezas através da introdução de pesos nos pontos de dados. Isso leva ao conceito de MMQ ponderado, onde os pesos são escolhidos de acordo com a precisão das medições, sendo contemplado em diferentes trabalhos na literatura (FARACO *et al.*, 2008; CARVALHO; VIEIRA; GREGO, 2009; KLEIN *et al.*, 2011). Embora não introduzido no script em código aberto, destaca-se que o mesmo foi feito em Octave (equivalente ao MATLAB®, arquivo .m), portanto sendo facilmente modificável caso seja necessário.

Assim, esse estudo contempla o MMQ, como uma ferramenta essencial na análise de dados e ajuste de modelos matemáticos. A formulação matemática envolve diferentes modelos, inclusive não-lineares, onde a técnica de linearização é abordada na elaboração do script em Octave e conta com programação feita para os 5 modelos anteriormente indicados, tal como apresentado na Tabela 1.

Ao realizar ajustes com linearização e MMQ, é necessário verificar a qualidade do ajuste. Obviamente o critério visual gráfico da coincidência da curva com os dados discretos fornecem indicativos, mas é necessário definir critérios matemáticos. Segundo referências (BRASIL; BALTHAZAR; GÓIS, 2015; ÁVILA, 2000; GILAT; SUBRAMANIAM, 2008), para ajustes lineares, o critério que demonstra a qualidade do ajuste é o coeficiente de determinação ( $R^2$ ), que varia entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1 melhor é o ajuste. A definição matemática direta para o coeficiente de determinação é obtida através da Equação 8. Outra forma de obter o coeficiente de determinação é através do coeficiente de Pearson ( $r$ ), definido na Equação 9. Este, por sua vez, varia entre -1 e 1 e indica correlações de crescimento inverso ou proporcional entre as variáveis. Quando o coeficiente de Pearson é elevado ao quadrado fornece o coeficiente de determinação.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - y'_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \quad (8)$$

$$r = \frac{n \cdot \sum(x_i \cdot y_i) - \sum(x_i) \cdot \sum(y_i)}{\sqrt{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}} \quad (9)$$

### 3. RESULTADOS/ DISCUSSÕES

O principal resultado é o script elaborado em Octave, que segue a metodologia matemática do MMQ associada ao procedimento de linearização para os modelos não-lineares presentes. Destaca-se que o script permite a seleção entre cinco modelos para ajuste de curva, sendo eles: linear, de potência, exponencial, recíproca e Michaelis-Menten. O código mostrado abaixo pode ser copiado e executado tanto em Octave como em MATLAB®. As operações internas foram feitas sem o uso de funções compiladoras para permitir a utilização em outros softwares que executem arquivos “.m” além do Octave.

```
1 clc;closeall;clear all;
2 format;
3 %MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (MMQ)
4 %Dados: em pares de variavel [x1 y1; ...; xnyn]
5 dados=importdata('dados.txt'); %Importando dados de um arquivo
.txt
6 n=length(dados);
7 x=(dados(:,1));
8 y=(dados(:,2));
9
10 x_temp=x; y_temp=y; %Aqui faz-se uma cópia dos vetores originais
para vetores temporários que serão alterados durante a rotina
11
12 while(1)
13     mod=input('0)y=ax+b 1)y=bx^a 2)y=be^(ax) 3)y=1/(ax+b)
4)y=ax/(b+x) \\Escolha o modelo = ');
14     if (mod~=0) && (mod~=1) && (mod~=2) && (mod~=3) && (mod~=4)
15         disp('Erro: escolha número inteiro entre 0 e 4')
16         break
17     end
18     switch mod
19         case 0, %Função já é linear
20         case 1, x=log(x); y=log(y); %Linearização
21         case 2, y=log(y); %Linearização
22         case 3, y=1./y; %Linearização
23         case 4, x=1./x; y=1./y; %Linearização
24     end
25     sx=sum(x);
26     sy=sum(y);
27     sxy=sum(x.*y);
28     sx2=sum(x.^2);
29     sy2=sum(y.^2);
```

```
30     A=[sx n;sx2 sx];
31     b=[sy;sxy];
32     a=A\b; %Corresponde a=inv(A)*b
33     al=a(1);
34     bl=a(2);
35     y_aj=al*x+bl; %Calcula-se a reta ajustada nos pontos x,
para usar no cálculo de r2
36     Errog=sum((y-y_aj).^2); %Erro global (que foi minimizado)
37     r2=1-(n*Errog)/(n*sy2-sy^2); %Coeficiente de determinação
38     %Devolve-se os dados aos vetores originais x e y
39     x=x_temp; y=y_temp;
40     xx=linspace(x(1),x(n),100);
41     switch mod
42         case 0, modelo=' y=ax+b',a=al,b=bl,r2,yy=a*xx+b;
ye=a*x+b;plot(x,y,'*',xx,yy,x,yy,'or');
xlabel('rotulo_x');ylabel('rotulo_y');title('titulo'
);
43         case 1, modelo='
y=bx^a',a=al,b=exp(bl),r2,yy=b*xx.^a;
ye=b*x.^a;plot(x,y,'*',xx,yy,x,yy,'or');
xlabel('rotulo_x');ylabel('rotulo_y');title('titulo'
);
44         case 2, modelo=' y=be^(ax)',a=al,b=exp(bl),r2,
yy=b*exp(a*xx);ye=b*exp(a*x);plot(x,y,'*',xx,yy,x,
ye,'or');xlabel('rotulo_x');ylabel('rotulo_y');
title('titulo');
45         case 3, modelo=' y=1/(ax+b)',a=al;b=bl,r2,
yy=1./(a*xx+b);ye=1./(a*x+b);
plot(x,y,'*',xx,yy,x,yy,'or');xlabel('rotulo_x');
ylabel('rotulo_y');title('titulo');
46         case 4, modelo=' y=ax/(b+x)',a=1/bl,b=a*al,r2,
yy=a*xx./(b+xx);ye=a*x./(b+x);
plot(x,y,'*',xx,yy,x,yy,'or');xlabel('rotulo_x');
ylabel('rotulo_y');title('titulo');
47     end
48 break
49 end
```

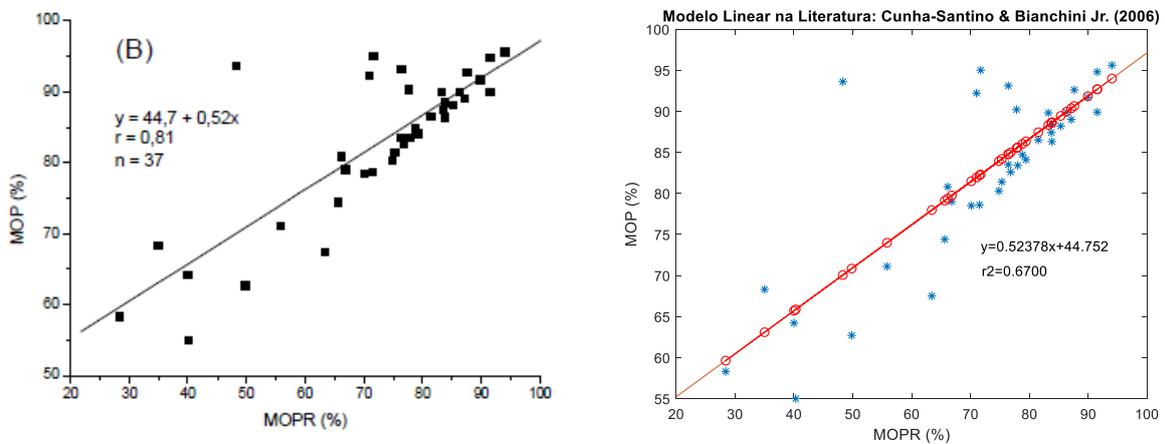
Nas linhas de 4 até 8, destinadas à importação de dados, deve-se destacar que tais dados devem estar em arquivo .txt, onde devem ser condicionados na forma de pares ordenados listados. Assim todos os dados da primeira coluna para todas as linhas irão compor os dados para  $x$ , e, de forma semelhante, todos os dados da segunda coluna para todas as linhas irão compor os dados para  $y$ . Todos os pares ordenados devem estar completos para que o vetor  $x$  e o vetor  $y$  tenham a mesma dimensão.

A forma mais interessante de demonstrar a efetividade do script é comparar com trabalhos já publicados e presentes na literatura, e isso mostra ainda a interdisciplinaridade e a gama multivariada de aplicações. Já se adianta a dificuldade de encontrar trabalhos, uma vez que o gráfico comparativo depende da exposição do banco de dados dentro do artigo, e geralmente essas partes são suprimidas na escrita. Esse ocultamento de dados, usualmente

está ligado à quantidade excessiva de listagem de dados ou ao espaço restrito de escrita em artigos.

Para o modelo linear, foi comparado com o trabalho de Cunha-Santino e Bianchini Junior (2006), que modela por ajuste linear teores de matéria orgânica relativo à degradação de macrófitas aquáticas, apresentando dados experimentais, junto ao modelo linear obtido. Neste trabalho, essa figura é apresentada no lado esquerdo da Figura 1. Nela aborda-se o gráfico de forma linear entre o teor de matéria orgânica particulada (MOP) em  $y$ , e o teor inicial de matéria orgânica particulada refratária (MOPR) em  $x$ . O script desenvolvido opera com os dados apresentados no trabalho citado e obtém o mesmo gráfico, que pode ser visto do lado direito da Figura 1. As equações são coincidentes e podem ser vistas dentro da Figura 1, e enfatiza a expressão obtida que é mostrada na Equação 10.

Figura 1 – Comparação modelo linear.



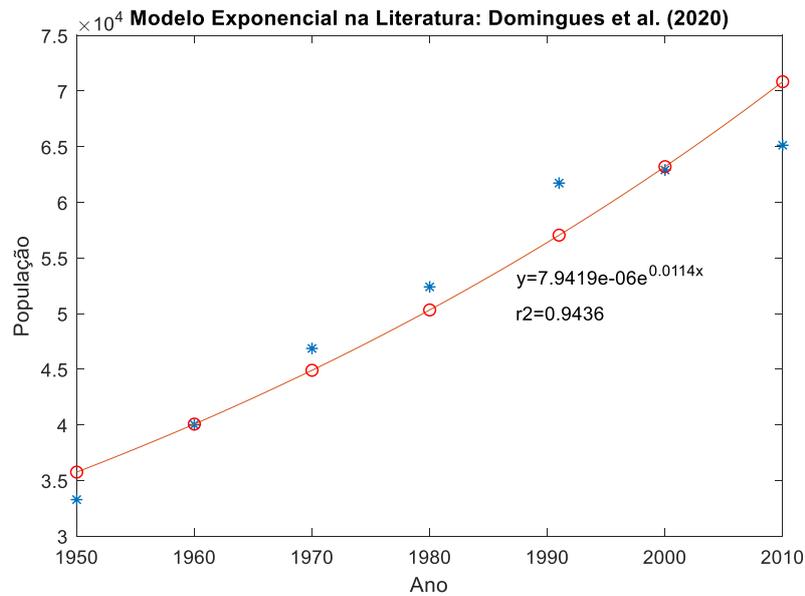
Fonte: Esquerda: Cunha-Santino; Bianchini Junior (2006), direita: os autores.

$$MOP = 0,52378 \cdot MOPR + 44,752 \quad (10)$$

Para o modelo exponencial, o resultado obtido pelo script foi comparado com o trabalho de Domingues *et al.* (2020), que aborda um estudo biomatemático da população de Formiga-MG ajustada por modelo exponencial. Na referência, é obtida uma equação disposta na seção 3.2 do trabalho citado, e aqui apresentado na Equação 11, que modela a evolução populacional através do modelo exponencial, onde  $t$  equivale ao  $x$ , sendo o tempo, e  $P(t)$  equivale ao  $y$ , sendo a população. O script desenvolvido opera com os dados apresentados no trabalho citado e obtém o gráfico que pode ser visto na Figura 2, e que coincide com o modelo determinado por Domingues *et al.* (2020).

$$P(t) = 0,000007945 \cdot e^{0,0114t} \quad (11)$$

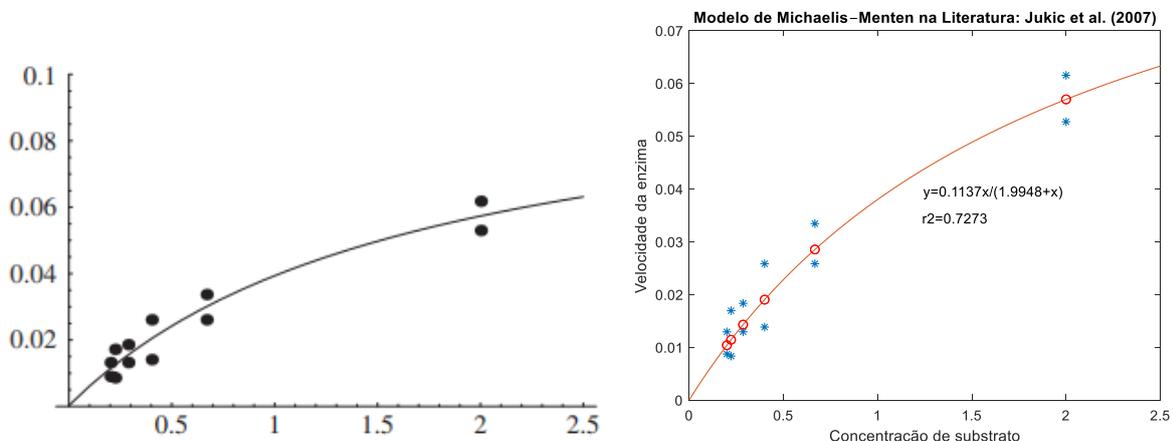
Figura 2 – Comparação modelo exponencial.



Para o modelo de Michaelis-Menten a comparação foi feita com os resultados do trabalho de Jukić, Sabo e Scitovski (2007), que aborda o estudo de mínimos quadrados ajustando uma função do modelo cinético de enzima. No trabalho referenciado, é obtida uma equação disposta na seção “Example 4” do trabalho citado, aqui apresentada na Equação 12, que modela a velocidade de enzima em  $y$ , em relação a concentração do substrato em  $x$ , através do modelo Michaelis-Menten. É mostrado no trabalho referenciado, a representação gráfica dos pontos discretos junto com o ajuste através do modelo Michaelis-Menten, que neste trabalho é apresentado no lado esquerdo da Figura 3. O script desenvolvido opera com os dados apresentados no trabalho citado e obtém o mesmo gráfico que pode ser visto na Figura 3 do lado direito. Como pode ser observado, a Equação 12 e a equação apresentada na Figura 3 são convergentes.

$$y = \frac{0,113728 \cdot x}{1,99484 + x} \quad (12)$$

Figura 3 – Comparação modelo Michaelis-Menten.

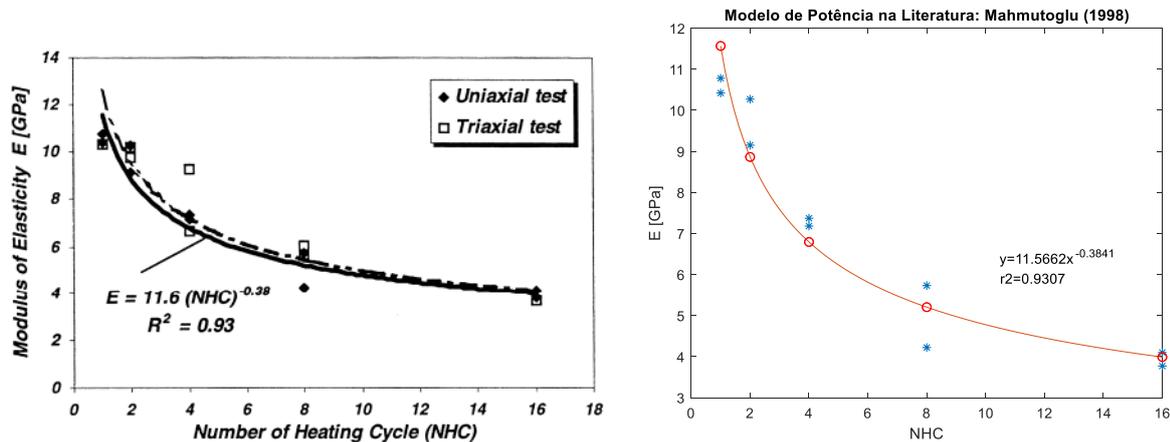


Fonte: Esquerda: Jukić, Sabo e Scitovski (2007), direita: os autores.

Para o modelo de potência a comparação foi feita com os resultados do trabalho de Mahmutoglu (1998), que estuda a abertura dos contornos de grão de amostras de rocha de granulação fina por meio de aquecimento e resfriamento cíclicos. O estudo geotécnico serve como uma simulação física de fraturas no maciço rochoso e permite uma discussão das mudanças no comportamento mecânico da rocha fraturada. Neste artigo, o objetivo é mais específico, de comparar o ajuste por modelo de potência executada no trabalho de Mahmutoglu (1998) para a variação do módulo de elasticidade ( $E$ ) do mármore Carrara com o aumento do número de ciclos de aquecimento ( $NHC$ ) para testes uniaxiais, com o resultado obtido utilizando o script proposto. A Equação (13) é obtida através da programação em Octave, já colocada em termos das variáveis do problema. Deve-se notar que é a mesma equação representada na Figura 4 do lado esquerdo, adaptada de Mahmutoglu (1998), a mesma Figura 4, do lado direito, apresenta o gráfico obtido pelo script proposto nesse artigo. Portanto provando tanto convergência gráfica, Figura 4, como convergência matemática, Equação (13).

$$E = 11,5662 \cdot NHC^{-0,3841} \quad (13)$$

Figura 4 – Comparação modelo de potência.



Fonte: Esquerda: Mahmutoglu (1998), direita: os autores.

Com base nas comparações apresentadas em relação aos trabalhos presentes na literatura, observa-se que o script feito em Octave cumpre devidamente sua função. Destaca-se que a comparação com a literatura para o modelo recíproco não foi realizada em virtude da dificuldade de obtenção de dados. Existem diversos trabalhos que abordam esses tipos de modelos (LUCENA; PEREIRA; LEITE, 2018; GOMES; KRUSCHE; LÓPEZ, 2020; FAREBROTHER, 2020; PAUL; MALLICK, 2022), mas apresentam o gráfico já ajustado para o modelo, sem os dados pontuais informados na escrita, o que inviabiliza a utilização no código desenvolvido para comparação com os resultados presentes na literatura.

Ainda sobre essa nuance de listagem de dados não expostas em alguns trabalhos, isso acontece em razão de serem grupos com quantidades consideráveis de pontos. Destaca-se que isso não é empecilho para utilização do script, desde que se tenha a informação de todos os pares ordenados (informação de  $x$  e de  $y$ ) é possível ajustar os dados ao modelo desejado. Essa é justamente uma das vantagens do script. À medida que se tem mais pontos, realizar esses ajustes com o cálculo analítico em papel, ou em calculadoras científicas, deixa de ser um processo simples, sendo scripts em softwares programáveis um recurso bastante útil.

Sobre o código mostrado, é evidente a facilidade de modificação. Pode-se reimplementar a programação adicionando modelos que sejam úteis ao usuário. Esse é um

ponto muito importante tendo em vista que alguns tipos de estudos e alguns dados experimentais discretos são melhor representados por modelos específicos em algumas áreas, dos quais podem ser inseridos na programação.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste artigo, aborda-se o desenvolvimento em código aberto no Octave, focando sua aplicação na realização de ajustes de funções de linearização, utilizando uma simples e poderosa ferramenta de MMQ. A obtenção do script e a forma direta e fácil de lógica de programação implementada no seu desenvolvimento integrado com o MMQ, revelou seu potencial para o campo de análise e modelagem de dados, permitindo que o mesmo possa ser utilizado, e ainda reimplementado para outros modelos matemáticos.

Não apenas para este trabalho, mas de forma geral os softwares de código aberto emergem como um divisor de águas no mundo da pesquisa científica e do avanço tecnológico, ou mesmo de ferramentas "melhoradas" capazes de fazer de forma certa e automática ajustes e gráficos. A colaboração e a contribuição de uma comunidade global de desenvolvedores levam à criação de ferramentas acessíveis, flexíveis e em constante evolução. O Octave, sendo um ambiente gratuito de computação numérica de código aberto semelhante ao MATLAB, é uma prova das capacidades dos projetos voltados à comunidade científica e profissional. Nossa exploração dos recursos do Octave na implementação do MMQ para ajustes de funções de linearização ressalta sua importância como uma alternativa viável para pesquisadores, educadores e profissionais que buscam ferramentas computacionais sem as restrições de software proprietário.

O cerne deste artigo, o MMQ, mostrou-se uma técnica inestimável para estimativa de parâmetros do modelo e ajuste de dados. Sua base matemática, fundamentada na minimização da soma dos quadrados dos resíduos, junto as derivações aqui apresentadas, juntamente com a inclusão de equações e fórmulas, oferecem uma visão abrangente da mecânica do MMQ. Por meio de sua implementação no Octave, o método fornece um meio de extrair parâmetros significativos de conjuntos de dados, facilitando decisões baseadas em dados que levam em consideração em grande maioria das vezes o coeficiente de determinação ( $R^2$ ), que varia entre 0 e 1, e indica a qualidade do ajuste (quanto mais próximo de 1, melhor é o ajuste).

Ao concluir esta fusão de desenvolvimento de código aberto, computação numérica e o MMQ, fica evidente que essa abordagem tem o potencial de remodelar a análise de dados. A acessibilidade do Octave capacita pesquisadores e profissionais a se envolverem em atividades centradas em dados sem as barreiras financeiras frequentemente associadas a software proprietário, da mesma forma que foi pensado para o MMQ com linearização, podem ser desenvolvidos programas similares para análise de variância, ajuste de superfícies, filtragem de dados, dentre outros. Além disso, a transparência e a adaptabilidade das soluções de código aberto promovem uma compreensão mais profunda dos algoritmos subjacentes, promovendo tanto a exploração acadêmica quanto a (re)implementação prática. Em uma era impulsionada por dados, a capacidade de extrair insights significativos de informações complexas é fundamental.

#### 5. REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à análise matemática**. 2 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2000.

BRANDÃO, Rafael Vasques; ARAUJO, Ives Solano; VEIT, Eliane Angela. A estratégia da modelagem didático-científica para a conceitualização do real no ensino de física: um estudo

de caso com professores de ensino médio. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 12, n. 1, p. 85-110, 2019. <http://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2019v12n1p85>.

BRANDT, Célia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel. **Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações**. 2 ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. <https://doi.org/10.7476/9788577982325>.

BRASIL, Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca; BALTHAZAR, José Manoel; GÓIS, Wesley. **Métodos numéricos e computacionais na prática de engenharias e ciências**. São Paulo: Editora Blucher, 2015.

CABALLERO-RIVERO, Alejandro; SÁNCHEZ-TARRAGÓ, Nancy; SANTOS, Raimundo Nonato Macedo dos. Práticas de Ciência Aberta da comunidade acadêmica brasileira: estudo a partir da produção científica. **Transinformação**, v. 31, e190029, 2019. <http://dx.doi.org/10.1590/2318-0889201931e190029>.

CARDOSO, Vanessa Rodrigues dos Santos; CAMPOS, Lorena Almeida; DANTAS, José Alves; MEDEIROS, Otávio Ribeiro de. Factors associated with the structural liquidity of banks in Brazil. **Revista Contabilidade & Finanças**, v. 30, n. 80, p. 252-267, 2019. <http://dx.doi.org/10.1590/1808-057x201806350>.

CARVALHO, José R. P. de; VIEIRA, Sidney R.; GREGO, Célia R.. Comparação de métodos para ajuste de modelos de semivariograma da precipitação pluvial anual. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 13, n. 4, p. 443-448, 2009. <http://dx.doi.org/10.1590/s1415-43662009000400011>.

CORREA JUNIOR, Carlos Barbosa; TREVISAN, Leonardo Nelmi; MELLO, Cristina Helena Pinto de. Impactos do Programa Bolsa Família no mercado de trabalho dos municípios brasileiros. **Revista de Administração Pública**, v. 53, n. 5, p. 838-858, 2019. <http://dx.doi.org/10.1590/0034-761220180026>.

COUTO, Natalia Garcia; ALMEIDA, João Paulo Boff; GOVONE, José Silvio; CHRISTOFORO, André Luis; LAHR, Francisco Antonio Rocco. Relação entre a resistência ao cisalhamento e a resistência à compressão paralela às fibras de madeiras folhosas. **Ambiente Construído**, v. 20, n. 4, p. 319-327, 2020. <http://dx.doi.org/10.1590/s1678-86212020000400475>.

CUNHA-SANTINO, Marcela B; BIANCHINI JUNIOR, Irineu. Modelos matemáticos aplicados aos estudos de decomposição de macrófitas aquáticas. **Oecologia Brasiliensis**, v. 10, n. 02, p. 154-164, 2006. <http://dx.doi.org/10.4257/oeco.2006.1002.03>.

DIAS, Eric Ivantes; SILVA, Antonio Carlos Magalhães da. Análise do desempenho dos Fundos Imobiliários no Brasil de 2017 a pandemia Covid-19. **Revista Vianna Sapiens**, v. 12, n. 2, p. 56-77, 2021. <http://dx.doi.org/10.31994/rvs.v12i2.813>.

DIZON, M. A. C. Free and Open Source Software Communities, Democracy and ICT Law and Policy. **International Journal Of Law And Information Technology**, v. 18, n. 2, p. 127-141, 2009. <http://dx.doi.org/10.1093/ijlit/eap003>.

DOMINGUES, José S; SILVA, Bruna M; SÁ, Daiana L. População de Formiga-MG ajustada pelo modelo exponencial assintótico e sua comparação com os modelos clássicos de

Gompertz e logístico. **Biomatemática**, v. 30, p. 39-54, 2020. Disponível em: [https://www.ime.unicamp.br/~biomat/Bio30\\_art2.pdf](https://www.ime.unicamp.br/~biomat/Bio30_art2.pdf).

FARACO, Mário Antonio; URIBE-OPAZO, Miguel Angel; SILVA, Edson Antonio Alves da; JOHANN, Jerry Adriani; BORSSOI, Joelmir André. Seleção de modelos de variabilidade espacial para elaboração de mapas temáticos de atributos físicos do solo e produtividade da soja. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, v. 32, n. 2, p. 463-476, 2008. <http://dx.doi.org/10.1590/s0100-06832008000200001>.

FAREBROTHER, Richard William. Neopythagorean Approaches to Measures of Central Tendency and Dispersion. **Chance**, v. 33, n. 1, p. 26-29, 2020. <http://dx.doi.org/10.1080/09332480.2020.1726115>.

FARIAS, Manuela de Abreu; RODRIGUES, Claudinei José; PEREZ, Alondra Beatriz Alvarez. Avaliação do efeito da salinidade na cinética de desoxigenação no ensaio da DBO. **Revista de Ciências Ambientais**, v. 13, n. 1, p. 33, 2019. <http://dx.doi.org/10.18316/rca.v13i1.3756>.

FINGERHUTH, Mark; BABEJ, Tomáš; WITTEK, Peter. Open source software in quantum computing. **Plos One**, v. 13, n. 12, e0208561, 2018. <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0208561>.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Editora Bookman, 2008.

GOMES, Camila e Silva; KRUSCHE, Nisia; LÓPEZ, Javier Garcia. Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para o ajuste da curva de potência de um aerogerador de pequeno porte. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 1, p. 1-16, 2020. <http://dx.doi.org/10.35819/remat2020v6i1id3492>.

GUIMARÃES, Paulo Sérgio. **Ajuste de curvas experimentais**. Santa Maria: Editora UFSM, 2001.

IACONO, Antonio; NAGANO, Marcelo Seido. Aprendizagem Tecnológica: uma análise da contribuição dos mecanismos de aquisição e conversão do conhecimento para o acúmulo da capacidade tecnológica. **Revista de Gestão dos Países de Língua Portuguesa**, v. 18, n. 2, p. 146-168, 2019. <http://dx.doi.org/10.12660/rgplp.v18n2.2019.78459>.

JUKIĆ, Dragan; SABO, Kristian; SCITOVSKI, Rudolf. Total least squares fitting Michaelis–Menten enzyme kinetic model function. **Journal Of Computational And Applied Mathematics**, v. 201, n. 1, p. 230-246, 2007. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2006.02.017>.

KATZIN, David; VAN MOURIK, Simon; KEMPKE, Frank; VAN HENTEN, Eldert J. GreenLight – An open source model for greenhouses with supplemental lighting: evaluation of heat requirements under led and hps lamps. **Biosystems Engineering**, v. 194, p. 61-81, 2020. <http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2020.03.010>.

KLEIN, Ivandro; MATSUOKA, Marcelo Tomio; SOUZA, Sergio Florencio de; VERONEZ, Mauricio Roberto. Ajustamento de observações: uma interpretação geométrica para o método dos mínimos quadrados. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 17, n. 2, p. 272-294, 2011. <http://dx.doi.org/10.1590/s1982-21702011000200007>.

LEÃO, Lucas; RIBEIRO, Hilton Manoel Dias; BASTOS, Suzana Quinet de Andrade; HERMETO, Ana Maria. Indicador de desenvolvimento institucional municipal: impactos sobre a economia dos municípios brasileiros. **Estudos Econômicos (São Paulo)**, v. 50, n. 4, p. 733-766, 2020. <http://dx.doi.org/10.1590/0101-41615046lhsa>.

LUCENA, Leandro Ricardo Rodrigues de; PEREIRA, Juliana de Souza; LEITE, Maurício Luiz de Mello Vieira. Growth curve *Nopalea cochenillifera* in fractionation function of cladodes using power regression model. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 36, n. 3, p. 578-587, 2018. <http://dx.doi.org/10.28951/rbb.v36i3.238>.

MAHMUTOGLU, Y. Mechanical behaviour of cyclically heated fine grained rock. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 31, n. 3, p. 169-179, 1998. <http://dx.doi.org/10.1007/s006030050017>.

MALANSKI, Leonardo Köppe; MEINERS, Wilhelm Eduard Milward de Azevedo; SANTOS, Hudson Prestes dos. Curva IS, curva de Phillips e regra de Taylor: uma análise integrada da economia brasileira. **Revista de Economia Mackenzie**, v. 17, n. 2, p. 142-168, 2020. <http://dx.doi.org/10.5935/1808-2785/rem.v17n2p.142-168>.

MONTOLI, Guilherme Almeida; CABRAL NETO, João dos Santos. Estudo de Colisões Inelásticas por meio da Videoanálise. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 37, n. 2, p. 865-878, 2020. <http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2020v37n2p865>.

PAUL, Erina; MALLICK, Himel. Unified reciprocal LASSO estimation via least squares approximation. **Communications In Statistics - Simulation And Computation**, p. 1-11, 2022. <http://dx.doi.org/10.1080/03610918.2022.2146723>.

PAULA, Silvio da Rosa; UHR, Júlia Gallego Ziero; SANTOS, Gerson Silva dos. Religião e Educação: uma análise do desempenho dos estudantes no exame nacional do ensino médio. **Revista de Economia Mackenzie**, v. 20, n. 1, p. 36-57, 2023. <http://dx.doi.org/10.5935/1808-2785/rem.v20n1p.36-57>.

PAULINO, Allana Lívia Beserra; CIRILLO, Marcelo Angelo; RIBEIRO, Diego Egídio; BORÉM, Flávio Meira; MATIAS, Gabriel Carvalho. A mixed model applied to joint analysis in experiments with coffee blends using the least squares method. **Revista Ciência Agronômica**, v. 50, n. 3, p. 345-352, 2019. <http://dx.doi.org/10.5935/1806-6690.20190041>.

QUARTERONI, Alfio; SALERI, Fausto. **Cálculo científico com MATLAB e Octave**. Milano: Springer-Verlag, Milan, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-88-470-0718-5>.

RIES, Lisandra Kittel; PADILHA, Juliano Bitencourt; BORTOLUZZI, Adilson Pacheco; ZEITUNE, Anesio Felipe. Aplicações da Matemática na Engenharia: obtenção da equação de eficiência de motores elétricos utilizando o método dos mínimos quadrados. **Intermaths**, v. 4, n. 1, p. 67-77, 2023. <http://dx.doi.org/10.22481/intermaths.v4i1.12102>.

ROSA, Samuel Santos da; SILVA, Fabiano Couto Corrêa da; PAVÃO, Caterina Marta Groposo. Iniciativas de acesso aberto no combate à pandemia. **Rdbci Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação**, v. 19, p. 1-22, 2021. <http://dx.doi.org/10.20396/rdbci.v19i00.8666880>.

RUSCH, Fernando; MUSTEFAGA, Erick Chagas; HILLIG, Éverton; TREVISAN, Rômulo; TELEGINSKI, Evandro. Propriedades físicas de painéis de alta densidade (HDP) de pinus,

bambu e coparticipação de erva-mate. **Research, Society And Development**, v. 9, n. 7, e436974022, 2020. <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i7.4022>.

SALOMÃO NETO, Benito Adelmo; SILVA, Guilherme Jonas Costa da. Desaceleração, indústria e demografia no brasil: uma investigação sobre a estagnação da economia brasileira. **Rde - Revista de Desenvolvimento Econômico**, v. 2, n. 43, p. 136-160, 2019. <http://dx.doi.org/10.36810/rde.v2i43.6003>.

SHAH, Sonali K. Motivation, Governance, and the Viability of Hybrid Forms in Open Source Software Development. **Management Science**, v. 52, n. 7, p. 1000-1014, 2006. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.1060.0553>.

SILVA, Everton Luis Consoni da; SOUZA, Luiz Antonio Farani de; MEIRELLES, Paulo Henrique de Freitas; WUTZOW, Wilson Wesley. Método dos mínimos quadrados na utilização de curvas momento-rotação na análise de pórticos planos semirrígidos. **Matéria (Rio de Janeiro)**, v. 28, n. 1, 2023. <http://dx.doi.org/10.1590/1517-7076-rmat-2022-0285>.

SOUZA, Amaury de; OLIVEIRA, Soetânia Santos de; OZONUR, Deniz. Análise estatística de parâmetros de Weibull para avaliação de potencial de energia eólica em Campo Grande. **Journal Of Environmental Analysis And Progress**, p. 168-179, 2019. <http://dx.doi.org/10.24221/jeap.4.3.2019.2468.168-179>.



O conteúdo deste trabalho pode ser usado sob os termos da licença Creative Commons Attribution 4.0. Qualquer outra distribuição deste trabalho deve manter a atribuição ao(s) autor(es) e o título do trabalho, citação da revista e DOI.