Bernard Bolzano: O conceitualismo e a intuição na Educação Matemática

Bernard Bolzano: Conceptualism and intuition in Mathematical Education

Humberto Clímaco[1]
Michael Otte[2].

Resumo

Bolzano, conhecido como o "pai da aritmetização da matemática", tornou-se conhecido devido à clareza exemplar de conceitos, mas muitos educadores matemáticos atuais não valorizam esta virtude, não percebendo que não há tanta diferença entre calcular formalmente ou agir intuitivamente (afinal, não é tão importante se as regras de agir são explicitas ou implícitas), desde que sirva para formar conceitos, que era a preocupação de Bolzano. Neste trabalho mostramos a ligação de sua obra com a busca por clareza e comunicação do conhecimento (portanto de didática), e analisamos como sua noção de didática pode contribuir para os debates atuais da Educação Matemática.

Palavras-chave: Bernard Bolzano. Intuição. Explicação. Pensamento conceitual. Educação Matemática.

Abstract

Bolzano is known among historians of mathematics as "the father of arithmetization of mathematics" but his pedagogical and didactical efforts are little appreciated among educators of mathematics. Formal calculation and the intuitive approach are not so different as it might appear (and have jointly dominated mathematical thinking up to the 19^{th} century), such that the real alternative to such limitations seems to be a thoroughly conceptual approach to mathematics. Such were Bolzano's beliefs and the present paper tries explain that and make Bolzano's approach fertile to mathematics education and to mathematical epistemology.

Keywords: Bernard Bolzano. Intuition. Explanation. Conceptual thinking. Mathematical Education.

1 Professor substituto no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás e mestre pela Universidade Federal de Mato Grosso. E-mail:<haclimaco@yahoo.com>.

2 Professor Emérito do Instituto de Didática da Matemática da Universidade de Bielefeld – Alemanha e Professor Visitante do Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso. E-mail: <michaelontra@aol.com>.

Introdução

Neste artigo mostramos que toda a obra de Bolzano está profundamente ligada à sua busca por clareza na comunicação do conhecimento (portanto de didática), analisando de que forma sua noção de didática pode contribuir para os debates atuais da Educação Matemática.

Atualmente, quando se discute a relação entre saber científico e saber escolar, entre abstração e intuição, e quando este debate se revela particularmente caloroso e intenso na Educação Matemática – por ser a Matemática talvez o ramo do conhecimento em que o saber abstrato teve mais alcance, o que justifica sua capacidade de aplicação nas mais diversas áreas e sua quase inquestionável obrigatoriedade no ensino em todo o mundo – o resgate da obra de Bolzano e seu diálogo com os grandes clássicos da filosofia das ciências, pode ser um importante elemento para compreendermos e fundamentarmos melhor este debate.

Bolzano é conhecido pelos matemáticos como aquele que demonstrou o "Teorema de Bolzano", o "Teorema do Valor Intermediário", e como quem deu a primeira demonstração do teorema que, modificado por Weierstrass, ficou com o nome de "Teorema de Bolzano-Weierstrass". Mas, poucos matemáticos sabem que resultados importantes como o "critério de convergência de Cauchy", bem como uma definição rigorosa da continuidade e do infinito, foram feitos pela primeira vez por Bolzano (BOLZANO, 1817/1980; SEBESTIK, 1992).

Na Filosofia, Bolzano é conhecido como o primeiro pensador a afirmar que o pensamento se baseia na maneira como nós o representamos e por isso, para se buscar a verdade, temos que começar perguntando o que significa uma proposição. Esta abordagem da Filosofia, muito aceita após o período em que Bolzano viveu, é chamada semântica.

A obra filosófica de Bolzano é inseparável de sua obra matemática. Bolzano foi talvez o primeiro matemático moderno, mas não o único dentre os criadores da Matemática pura (Weierstrass, Grassmann e Dedekind, por exemplo), que se preocupou com o ensino. Esta preocupação, por sua vez, tem íntima conexão com sua ênfase no rigor matemático e científico. Por isso é muito importante que os debates atuais sobre transposição didática levem em conta este teórico que foi, talvez, o primeiro que formulou Matemática pura e, ao mesmo tempo, se preocupou com a transposição deste conhecimento, tomando essa transposição com um método de construção da Matemática.

Toda tentativa de resolver um problema qualquer, ou de responder a uma questão, deve necessariamente refletir sobre o contexto histórico e filosófico da situação. Neste artigo, pretendemos oferecer tal reflexão para melhor entender um paradoxo.

O paradoxo consiste em que a concepção de Matemática de Bolzano é o resultado de uma preocupação pedagógica e didática, por um lado, e que, por outro, esta concepção é, nos dias atuais, frequentemente considerada formal, teórica e até mesmo antididática. Este paradoxo representa um problema objetivo do ensino de qualquer disciplina, pois se por um lado todo aluno tem de construir seu próprio conhecimento para realmente entender, por outro, o chamado *discovery learning*[3] não é suficiente para alcançar um nível satisfatório. O professor tem uma tarefa quase impossível, que consiste em ensinar um conhecimento sem entregá-lo pronto, pois o aluno só entende aquilo que descobriu por si só (BROUSSEAU, G.; OTTE, M. 1991).

Desde o *Renascimento*, com Descartes, considerou-se que a Matemática deveria basear se na intuição; Kant acentuaria e fundamentaria tal base: "os modernos" (Descartes até Kant) se diferenciaram dos "antigos" (ou seja, dos aristotélicos), pela crença em que o fundamento de qualquer conhecimento é o sujeito e suas maneiras de pensar e não o objeto de conhecimento. A "revolução copernicana" da epistemologia de Kant representa, de fato, a última pedra de um castelo que foi construído pelo menos desde o Renascimento (SCHMITT, 2008).

Benjamin Nelson chamou a atenção para o fato de que o maior estímulo da Revolução Científica do século XVII resultou de mudanças nos hábitos e no estilo de pensamento e, especificamente, da busca pela certeza individual. As "Regulae" de Descartes, de 1628, são uma expressão clara dessa nova atitude. Descartes afirma ter que assumir o hábito de confiar só em que é "completamente evidente e incapaz de ser duvidado" e de rejeitar tudo que é meramente "conhecimento provável" (REGULA II).

Descartes também contrastou o discurso matemático, que se destaca "por causa da certeza e da evidencia de suas razões", com a retórica e eloqüência, que servem mais para persuadir as pessoas do que para educá-las. Geralmente, os matemáticos foram contrastados com os retóricos (como teólogos ou juristas), desde o século XVI e foi considerado tão ridículo exigir demonstrações dos últimos como esperar eloquência dos primeiros, ou seja; Matemática e Linguagem foram consideradas opostos.

A racionalidade e a certeza das ciências e da Matemática foram consideradas por positivistas e modernos, em geral, consequências de seu método universal. As tentativas de aritmetizar a Matemática e da Geometria de Descartes (1637) até Hilbert (1899) são uma clara expressão dessa atitude. A ciência aristotélica,

3 Aprendizado por meio da descoberta

em contraste, sempre foi caracterizada pela homogeneidade entre método e objeto. Por exemplo, não eram admitidos métodos algébricos na prova de teoremas geométricos e nem argumentos geométricos ser usados na álgebra e na análise. Daí resultou a distinção entre provas que provam, ou seja, que só trazem certeza e convicção subjetiva, e provas que explicam, considerando as primeiras meras verificações, enquanto as segundas mostrariam os fundamentos objetivos de tais verdades.

Bolzano, que num certo sentido, retomou Aristóteles (JONG, 2001) fundamentou a Matemática, em contraste, na noção de prova rigorosa, e considerava a homogeneidade aristotélica entre método e objeto essencial e por consequência distinguiu entre estes dois tipos de provas. Esta distinção resulta da diferenciação entre as coisas que aparecem antes no processo de pensamento, em contraste com outras que têm prioridade no sentido da estrutura objetiva do conhecimento. Foi Aristóteles o primeiro a nos alertar para o fato de que o que aparece em primeiro lugar na percepção e no pensamento não necessariamente é o mais fundamental de um ponto de vista objetivo[4]. Se fosse diferente, e se tudo fosse tal como aparece diante de nós, então, todo e qualquer ensino seria supérfluo e desnecessário!

Bolzano viveu numa época em que a transmissão de conhecimento ganhava importância, devido ao fato de que ocorriam grandes mudanças na ciência e na sociedade, exigindo que o conhecimento, que antes era restrito a poucos, se expandisse.

Assim, a Matemática deixava de ser algo apenas de uma pequena comunidade de matemáticos, voltada, muitas vezes, para um saber especulativo e pouco prático; em particular, as necessidades da Revolução Industrial exigiram que a Matemática passasse a ser objeto de estudo de muitos, e assim surgiram as primeiras grandes turmas de engenharia.

Bolzano rompeu com a tradição "moderna" ao tirar do centro das atenções o sujeito e colocar a comunicação e o sujeito social (não individual) em primeiro lugar. Por isso, a comparação entre as noções de Matemática de Kant e de Bolzano são tão férteis e permitem abordarmos temas tão amplos!

---

4 Para mostrar esta diferença, Aristóteles apresenta o seguinte exemplo. "Seja C apontando para planetas, B para não brilhante, e A estar perto. Então é verdade estabelecer B de C... Mas também é verdadeiro estabelecer A de B; ... Então A deve se aplicar a C; então está provado que os planetas estão perto. Então este silogismo prova não a razão mas o fato, porque não é devido a que planetas não brilham que eles estão pertos, mas porque eles estão perto eles não brilham" (Aristóteles, Post. Anal., Livro I, cap. 13, 781-b).

1. Apresentação de Bolzano e de sua Teoria da Ciência (*Wissenschaftslehre*)

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano nasceu em cinco de outubro de 1781, em Praga, na Boêmia, região que atualmente faz parte da República Tcheca, mas que então compunha o Império Austríaco. Faleceu em 1848. Estudou Filosofia, Teologia e Matemática na Faculdade de Filosofia da Universidade Carl-Ferdinand de Praga. Após terminar seus estudos, em 1804, Bolzano tornou-se padre; e inicialmente pretendia estudar mais a fundo a Matemática e a Filosofia de Kant, autor cuja obra estava, na época, banida da Áustria.

Em 1804, Bolzano obteve o título de professor de ciências da religião católica na Universidade de Praga e, em 1811, obteve efetivamente o direito de professar suas próprias doutrinas; mas, em 1819 foi demitido devido às acusações de estar associado a supostas intrigas políticas de um de seus alunos, e de heresia, por expressar seu nacionalismo tcheco, abertamente.

Com a perda da carreira de professor, Bolzano passou a ser sustentado por amigos e alunos. Foi no mesmo ano de sua aposentadoria forçada (1919) que Bolzano começaria a escrever sua mais importante obra filosófica, "Doutrina da Ciência" (Wissenschaftslehre), que seria terminada e publicada somente em 1837. Esta monumental obra, com suas mais de 5.000 páginas, tem uma importância maior na obra de Bolzano, pois é nela que ele propõe toda uma reformulação da noção de ciência e justifica filosoficamente sua proposta de fundamentação da Matemática.

A obra de Bolzano é imensa. Foi o primeiro filósofo moderno a propor uma abordagem semântica da Filosofia. Influenciou muito filósofos de diferentes áreas, como Husserl (1859-1938), Twardowski (1866-1938), Frege (1848-1925), Carnap (1891-1970), Tarski (1901-1983), Peirce (1839-1914), Wittgenstein (1889-1951), dentre outros. Deu também importantes contribuições para a Matemática. Sua mais célebre obra matemática, no entanto, foi *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*[5], que pode ser considerada um marco da aritmetização da análise; Bolzano foi chamado por Félix Klein (1849-1925), pelos princípios formulados neste artigo, de "pai da aritmetização da análise" (KLEIN,

5 Tradução: "Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação". É o artigo que contém a demonstração do que hoje é conhecido como Teorema de Bolzano, que é um caso particular do Teorema do Valor Intermediário. Nas próximas ocasiões em que citarmos este artigo, ele será denominado *Prova Puramente Analítica...* quando citado no corpo do texto, e RB quando em citações (como é o padrão em alguns artigos em diferentes línguas, em referência às iniciais das duas primeiras palavras que aparecem em maiúsculo no título do artigo – Rein e Beweis). O Teorema de Bolzano em questão será sempre escrito em letras maiúsculas, pois é de grande importância para esta dissertação.

1887) e seus mais importantes resultados estão contidos na maioria dos livros elementares de análise matemática (mas veja bem, como já indicávamos, Bolzano seguindo um ideal aristotélico da ciência não quis aritmetizar a Matemática toda, como se diz as vezes!).

Bolzano foi uma das poucas pessoas (ao lado de Gauss, Grassmann, Jacobi, Cauchy e Fourier) que, no início do século XIX, era apto e culto o suficiente para perceber algo que escapou a seus contemporâneos: que as tentativas de fundamentação da análise matemática feitas por Pascal (1623-1662) e por Leibniz (1646-1716; essa última predominante até o século XIX) não mais correspondiam às necessidades colocadas pela Matemática desse período. Particularmente o desenvolvimento do conceito de função matemática (integrabilidade, diferenciabilidade, etc.) foi insuficiente para a Matemática pura, como o mostraram as novas aplicações na teoria da eletricidade e do calor, áreas que não seguiram facilmente o paradigma da mecânica newtoniana (lembremo-nos de que todas as leis naturais e todas as regularidades do mundo se apresentam em termos de funções e relações funcionais!).

Sua principal obra filosófica chama-se *Wissenschaftslehre*, que significa 'Doutrina da Ciência', escrita entre os anos 1819 e 1837, trata de questões relativas à natureza do conhecimento e das verdades científicas. É dividida em duas partes, marcadas pela distinção objetivo x subjetivo: a primeira é composta pelos volumes I e II (§1 a §268), que tratam da natureza e estrutura da ciência no nível da *ordo essendi* (a ordem do ser, ou a ordem essencial das coisas – em outras palavras, de como as representações, proposições e verdades são "em si mesmas"); e a segunda, pelos volumes III, IV e V (§269 até §718), que tratam da forma como os homens conhecem, descobrem e descrevem a realidade cientificamente (chamada de *ordo cognoscendi*).

No *Wissenschaftslehre*, Bolzano define, no §1, ciência (*Wissenschaft)* como

> o conjunto de verdades de um certo tipo que tem a qualidade que sua parte já conhecida e importante merece ser apresentada num livro particular. Aquele livro mesmo que aparentemente foi escrito por alguém com o propósito determinado de representar todas as verdades de uma ciência numa maneira para serem entendidas o mais facilmente possível, eu chamo de manual (ou livro didático) dessa ciência. (BOLZANO, § 1, 1837/1981)[6]

6 Para facilitar a leitura em qualquer edição ou idioma, indicaremos o trecho citado por meio do símbolo '§', utilizado por Bolzano, ao invés da página; para indicar o ano da obra, utilizaremos o símbolo '/' para separar o ano em que a obra foi escrita e o ano da publicação que utilizamos para o presente artigo.

É notável o fato de que sua obra *Doutrina da Ciência*, à qual Bolzano dedicou 18 anos de sua vida, e que é sua principal obra filosófica, traga as definições de "Ciência" e "Doutrina da Ciência" em termos de livro didático. Ao mesmo tempo em que foi um grande defensor do rigor e conhecido como o criador da aritmetização da análise, em que distinguiu radicalmente o subjetivo do objetivo e afirmou que nossas intuições precisam buscar a verdade das coisas, e não as coisas se adaptarem à nossa intuição, como afirmava Kant e muitos de seus seguidores.

Bolzano divide e apresenta o índice do *Wissenschaftslehre*, mostrando suas cinco partes distintas (§15):

1. A **Doutrina das Premissas** (*Fundamentallehre*). Nesta parte ele demonstra a existência de verdades em si e nossa capacidade de reconhecê-las. Essa distinção fundamental entre a verdade que alguém pensa e as verdades de fato que existem, mesmo que ninguém jamais as tenha pensado, é da maior importância para ele e vem daí a distinção entre provas e explicações;
2. A **Doutrina Elementar**: a doutrina das representações (*Vorstellungen*), proposições, proposições verdadeiras e conclusões;
3. A **Epistemologia** ou teoria das condições de conhecimento ou cognição;
4. A **Arte da Invenção**, ou as regras que temos que obedecer na busca de verdades;
5. A **Doutrina da Ciência** propriamente dita;

A preocupação de Bolzano era com clareza dos fundamentos que tinha o duplo objetivo de evitar paradoxos e de tornar o conhecimento comunicável e compreensível.

Em muitos dos capítulos do *Wissenschaftslehre* (§12, §162, §198, dentre outros), sobretudo naqueles em que Bolzano define termos antigos de forma nova, inicia comentando definições de contemporâneos e predecessores; nesses comentários percebemos sua crítica a Kant e àqueles que interpretaram de forma psicológica as doutrinas kantianas.

Particularmente Kant – cuja principal obra, *Crítica da Razão Pura*, foi editada no mesmo ano em que Bolzano nasceu (1781) –, que colocou a epistemologia em primeiro lugar, foi considerado por Bolzano seu maior adversário. No entanto, foi estudando, criticando e pretendendo corrigir a obra de Kant que Bolzano construiu sua própria doutrina. A controvérsia principal foi a respeito da relação entre geral e particular, entre conceito e intuição (ou percepção). Para Bolzano, o conceito teve um papel muito mais importante que para Kant.

Muitos dos problemas e até contradições na teoria de conhecimento, na época resultavam do fato de que os conceitos foram representados inadequadamente; ciente disso, Bolzano percebeu que tornar explícito o conhecimento intuitivo, por meio da representação, seria uma contribuição importante para o progresso da Matemática. Esta convicção de Bolzano foi compartilhada por todos os lógicos do século XX.

Durante a época em que Bolzano viveu, a transmissão do conhecimento e o ensino se tornavam cada vez mais importantes, e ele compreendeu que as intuições não podiam ser comunicadas. Esses objetivos se mostram, sobretudo, no seu artigo *Prova puramente analítica...*, pois a substituição da Geometria por números e por variáveis representantes de números eram a representação rigorosa que permitia eliminar, da Matemática, a intuição. A intuição poderia até ser usada como meio de comunicação dentro de uma pequena comunidade científica de matemáticos profissionais, mas para grandes turmas de profissionais de outras áreas (tais como engenheiros) era necessária uma linguagem geral e rigorosa. Conforme atesta Otte (2001, p. 42), "eram principalmente problemas de ensino e comunicação que levaram à exposição algébrica da análise.".

Bolzano considerava o grande obstáculo de sua época, a afirmação de Kant de que "uma lógica nunca pode ser um órgano" (apud BOLZANO, WL, §4), ou seja, a lógica forneceria as regras de raciocínio, mas não teria conteúdo próprio. Bolzano rejeitava também as afirmações de vários autores de que a lógica seria apenas formal ou analítica, ou seja, não diria respeito à verdade; para ele, este ponto de vista seria fruto de um preconceito psicológico daqueles que acreditam que o objeto da lógica são os pensamentos, ao invés de proposições (§8, §12). Afinal, estas noções se contrapunham – ou pelo menos assim era como Bolzano via as coisas – à sua noção de busca de clareza nos fundamentos.

O esforço de Bolzano mostrado no *Wissenschaftslehre* poderia ser resumido da seguinte forma: tentativa de demonstrar a objetividade da ciência; e que o papel do homem (ou do cientista, do sujeito cognoscente) é buscar compreender e transmitir esse conhecimento objetivo da melhor forma possível.

Boa parte do *Wissenschaftslehre* busca abordar assuntos que Kant tratara na *Crítica da Razão Pura*. Por isso, não é possível falar de Bolzano sem abordar a obra de Kant.

2. A semântica como expressão da nova Filosofia e como forma de transmissão de conhecimento

Antes de Bolzano, era predominante na Filosofia do conhecimento a epistemologia, em que o estudo sobre os limites da razão e sobre a natureza do conhecimento eram fundamentais. Kant foi, sem dúvidas, o pensador mais influente sobre esta forma de conceber o conhecimento. Como já foi mencionado, foram chamados de modernos estes filósofos que consideraram a reflexão sobre as possibilidades e limites do próprio pensamento e sobre os métodos da atividade cognitiva como fundamentos do conhecimento. Esta reflexão é o problema central da *Crítica da Razão Pura*.

Assim, os modernos se colocaram em oposição aos aristotélicos (como Bolzano), que acreditaram que a capacidade humana de representação do mundo deveria ser o fundamento de qualquer conhecimento verdadeiro (SCHMITT, 2008).

Kant criticou a escolástica afirmando que sua busca por explicações na essência das coisas a fazia perder qualquer capacidade de explicar a constante variação dos fenômenos reais que a vida e a ciência apresentam constantemente. Afirmou que a lógica, vista por Aristóteles e pelos escolásticos como meio de obtenção de novos conhecimentos, seria somente analítica, capaz apenas de prover a compreensão de um conhecimento já existente. Kant também enfatizou a importância da intuição e da noção de relação entre idéias.

A palavra Epistemologia designa a Filosofia das Ciências, mas com um sentido mais preciso. É essencialmente o estudo crítico dos princípios, dos métodos e das hipóteses e dos resultados das diversas ciências, destinado a determinar a sua origem lógica – portanto, não psicológica –, o seu valor e a sua importância objetiva (LALANDE, 1999, p. 313). Deste ponto de vista, a obra de Kant seria epistemológica. Por exemplo, Kant manteve uma noção construtiva da Matemática enquanto para Bolzano a Matemática deveria ser definida pelos seus objetos.

Já a Semântica é a doutrina dos significados dos signos. Considera as relações dos signos com os objetos a que eles se referem; encontra justificação etimológica no verbo grego δημαινειν, introduzido por Aristóteles para indicar a função específica do signo linguístico, em virtude da qual ele "significa", "designa" algo. Nesse sentido, era a parte da Linguística (e mais especialmente da Lógica) que estuda e analisa a função significativa dos signos, os nexos entre os signos linguísticos e suas significações. A Semântica restringe seu campo de investigação à relação entre signo e referente e constitui junto com a sintática os dois grandes capítulos da lógica formal pura (ABBAGNANO, 2000, p. 869).

Com a mudança do centro das atenções da ciência, do individual para o social, ocorre o deslocamento do foco: da epistemologia para a semântica ou para uma doutrina da ciência. Bolzano e seu *Doutrina da Ciência* foram uma nítida expressão desta mudança.

Consequentemente, passou-se da tendência epistemológica a buscar certeza individual, comprovável por meio da intuição (portanto subjetiva), para a tendência a buscar comunicação, ensino, clareza e a coerência das idéias E portanto a lógica, que fora criticada por Kant, seria revalorizada como instrumento privilegiado da Filosofia. A compreensão desta transformação é fundamental para compreendermos a evolução do ensino e da Matemática.

Já vimos, ao comentar a definição de Bolzano de ciência em seu *Doutrina da Ciência*, que para ele uma ciência é um sistema de proposições. Ora, as características de uma proposição são seu sentido e sua verdade. Assim se explica a nova orientação de Bolzano e sua nova Filosofia (que representava a posição de uma minoria em sua época).

Para Bolzano, conhecimento – e, portanto, ciência e teoria – são realidades, e não apenas processos mentais ou julgamentos que fazemos sobre as coisas. A *Doutrina da Ciência*, segundo ele, teria objetos próprios, que eram os significados objetivos dos conceitos e proposições. E por isso, Bolzano acreditava em verdades em si, proposições em si, dentre outras, e criticou Kant, dizendo que ele tinha confundido o conhecimento em si com a maneira como nós obtemos o conhecimento.

A preocupação de Bolzano era com a solidez e com a clareza dos fundamentos do conhecimento, por meio do esclarecimento e da representação das coisas de forma adequada, pois muitos dos problemas da Ciência e da Matemática de sua época resultavam do fato de que os conceitos não eram representados adequadamente. Por isso Bolzano via na semântica o meio de obter conhecimento seguro, e não na epistemologia[7]. Sua influência direta ou indireta foi profunda na Filosofia e na Matemática, pois após ele a semântica adquire importância cada vez maior na Filosofia, e a matemática torna-se definitivamente aritmetizada.

Como consequência da objetividade e realidade que Bolzano atribuía – tanto ao conhecimento quanto à ciência e à teoria – a comunicação, os argumentos e as provas foram para ele essenciais, e após algumas décadas passaram a sê-lo para toda a comunidade matemática. É no contexto da necessidade de comunicação e da transmissão do conhecimento, e, portanto, de didática, que devemos compreender a insistência de Bolzano em obter demonstrações independentes da evidência e da convicção, enquanto na época anterior Descartes e Pascal – nesse aspecto, concordantes com Kant – afirmavam que nada óbvio poderia ser definido ou provado, nem se preocuparam com a transmissão do conhecimento.

3. A diferença entre Verdade e Conhecimento

Para Kant, a diferença entre verdade e conhecimento não existe, pois o objeto de conhecimento é constituído na "síntese de apercepção", ou seja, é constituído pela atividade do sujeito. Na Filosofia de Kant os fundamentos do conhecimento foram concebidos assim, ou seja, como condições subjetivas de quaisquer experiências. Kant foi um dos filósofos, que chamamos acima de "modernos"; em contraste com os aristotélicos, ele considerou o conhecimento uma construção do sujeito epistêmico. Uma "nova luz", disse Kant, deve ter cintilado na mente de pessoas como Thales, quando perceberam que a relação entre o tamanho do mastro e a medida de sua sombra possibilitava o cálculo da altura de uma pirâmide, tendo sido dada a medida da sua sombra.

7 No entanto, não desprezou aspectos pragmáticos, como em WL, § 148, Nota 3, em que afirma que o sentido de um termo depende da situação e do uso que se faz dele.

"Então ele achou que não era suficiente meditar na figura como ela se apresentava diante de seus olhos... e então empenhar-se em adquirir conhecimento de suas propriedades, como elas eram, por uma construção positiva a priori." (KANT, 1787). E certamente, o mastro em si não tem nenhuma relação positiva com a pirâmide como tal, e as conclusões tiradas pelos sujeitos dependem inteiramente e somente das atividades cognitivas do sujeito. Isso implica que para Kant conhecimento foi conhecimento verdadeiro e ele não distinguiu entre verdade e conhecimento.

Como o interesse de Bolzano era prioritariamente com fundamentos seguros do conhecimento, tomava "verdade" como noção fundamental, pois ninguém poderia afirmar a inexistência de verdades sem ser inconsistente. "A proposição que afirma que nenhuma proposição verdadeira existe também é falsa" (afinal, se ela for verdadeira, então existem verdades) (BOLZANO, WL § 30). Mas isso implica que:

1. Todo conhecimento existe em forma de proposições; a Matemática, em particular, deveria ser entendida como um sistema de proposições e teoremas que são ligados por provas e argumentações. A distinção entre conhecimento e verdade é que a propriedade de ser verdadeira ou falsa é atribuível somente a proposições. Diferentemente, aos conhecimentos expressos por meio de julgamentos atribuímos certeza ou não certeza, e ainda graus diferentes de certeza, que não cabem às proposições (WL, § 26).

2. Há um número infinito de proposições verdadeiras, pois se "p" é uma proposição, "p é verdadeira", é uma proposição diferente. Para Bolzano, as afirmações "Esta casa é branca" e "É verdade que esta casa é branca", são duas afirmações diferentes, pois a primeira é um julgamento do sujeito, enquanto a segunda é uma afirmação objetiva sobre um objeto real, cuja verdade independe de sujeitos. Esta distinção o levou a demonstrar, por indução, que existem infinitas verdades, em sua obra publicada postumamente *Paradoxos do Infinito*, ao construir o conjunto infinito de verdades contido pelas afirmações: "p", "p é verdadeiro", ""p é verdadeiro" é verdadeiro", e assim por diante.

Do ponto de vista de Bolzano e sua nova visão, a Matemática carecia de fundamentos sólidos, e com o aparecimento dos novos recursos do cálculo – particularmente, o raciocínio que envolvia o infinito (soma de séries infinitas, 'quantidades' infinitamente grandes ou infinitamente pequenas) surgiam contradições e dificuldades em criar critérios objetivos para a verificação da certidão dos resultados (sobre resultados que hoje consideramos errados de matemáticos do calibre de Euler (RUSNOCK, 1997). Não era incomum o recurso ao tempo, ao espaço e à geometria para 'justificar' resultados algébricos

(BOLZANO, 1817/1980), que seriam considerados, a partir de Bolzano, como mais gerais e mais puros (e que seriam a base da Matemática pura, a partir do fenômeno chamado de aritmetização, ao qual nos referimos no item anterior).

Aristóteles fundamentou a lógica pela Ontologia (lógica como Organon). Para Kant, a lógica só representava as leis de pensamento (lógica como Canon). Bolzano nem acreditava numa harmonia pré-existente entre a estrutura do mundo objetivo e a estrutura de conhecimento (como Aristóteles), nem quis seguir o construtivismo e ceticismo de Kant (o famoso objeto em si que não é conhecível ou alcançável), mas acreditava que podemos alcançar conhecimentos que refletem a estrutura verdadeira do mundo objetivo e que o pensamento é determinado pelo seu objeto e por isso deveria usar métodos congruentes com os objetos.

O mundo dos objetos tem dois aspectos: o aspecto fenomenal, que reconhecemos em primeiro e o aspecto essencial, que é objetivamente o primeiro ou mais fundamental, mas que só podemos conhecer por meio da ciência, cujos dados são os fenômenos. Por isso; Bolzano faz a distinção entre provas que provam e provas que explicam.

Bolzano acreditava que a influência de Kant sobre a Filosofia da Ciência era responsável pela ausência de fundamentos e a existência de contradições na Matemática. De fato, deve-se reconhecer que a concepção de que todo conhecimento se baseia nas noções de espaço e tempo, defendidas por Kant, correspondiam, na Matemática, a paralisar qualquer tentativa sólida de fundamentação.

Assim, Bolzano procurou critérios que separassem o objetivo do subjetivo, tratando de diferenciar o ato de pensar do conteúdo do pensamento. O ato de pensar seria inacessível, portanto, inútil na busca do conhecimento. Já o conteúdo do pensamento seria o objeto sobre o qual o pensamento opera; desse ponto de vista, é o estudo deste último; e a representação adequada dos objetos sobre os quais pensamos o que permitiria o acesso à verdade.

Bolzano afirmou que se queremos comunicar algo, não podemos nos preocupar com o processo mental inacessível, mas sim com o conteúdo daquilo pensamos, cuja expressão por meio da representação é o que possibilita a comunicação deste conteúdo de um sujeito para o outro, daí a necessidade de não mais fundamentar o conhecimento na intuição, mas na representação.

Analogamente com a intuição: Bolzano não nega a existência da intuição, mas afirma que nós só temos acesso a seu conteúdo, à matéria-prima sobre a qual a intuição opera, e por isso é esse conteúdo (que são as proposições, conceitos, e representações em si) que nos interessa, se queremos obter conhecimento seguro.

4. Conclusão: o legado de Bolzano e alguns aspectos da polêmica com Kant à luz dos dias de hoje

A obra de Bolzano, e particularmente seu artigo *Prova puramente analítica...*, significou um marco na Matemática pura, porque colocou no centro a idéia de que mesmo as questões intuitivas ou subjetivamente óbvias deveriam ser demonstradas em termos de conceitos que não envolviam intuições.

A partir daí, prevaleceu a idéia de Bolzano de que era necessário rigor e abstração na Matemática e que com sua expansão e seu ensino, é necessário que as provas matemáticas cumpram um papel de mostrar a ordem dos conceitos.

Concluímos que a exigência de provas rigorosas nasceu junto com a Matemática pura, como nós a conhecemos hoje. E a própria Matemática pura surgiu das necessidades de ensino, conforme atesta Dedekind, ao afirmar que:

> [...] minha atenção foi pela primeira vez dirigida a considerações que formam o objeto deste texto (Ensaios sobre a teoria dos números) no outono de 1858. Como professor na Escola Politécnica de Zurique eu me encontrei pela primeira vez obrigado à leitura sobre os elementos do cálculo diferencial e me senti mais ciente do que nunca antes da falta de uma fundamentação realmente científica para a aritmética. (1901, p. 1).

Assim, as provas rigorosas não foram resultado de um capricho ou invenção de alguns matemáticos; nem uma forma particular de conceber ou interpretar a Matemática, como alguns autores, como Hanna (1983) e outros, parecem acreditar. E a Reforma da Matemática Moderna foi uma tentativa de levar para as escolas características que eram próprias da Matemática pura, desde seu surgimento no século XIX. Não foi, portanto, a criação de uma nova Matemática; uma nova concepção de ensino, nem uma transposição artificial de conceitos que não fazem parte da Matemática atual.

Rigor e abstração vieram juntos com a aritmetização. E aritmetização é a própria essência da Matemática pura, pois representou a idéia de que as verdades geométricas seriam partes aplicadas ou subordinadas da Matemática pura (RB, p. 170 (prefácio)).

O desenvolvimento da Matemática pode ser visto como o resultado de uma complexa relação entre intuição e conceito, e como um esforço por evitar o uso de intuições ao formalizar um conceito, no qual a representação desempenha um papel importante e em que as noções elementares (os axiomas) são aceitos de forma que permitam a construção de novos conceitos e o desenvolvimento da Matemática.

Aprendemos com Kant que todo conhecimento é resultado de uma relação entre o sujeito e o objeto da cognição, entre intuição e conceito concebidos como complementares. E de fato, não é adequado para a Matemática pura de hoje que as definições contrariem nossas intuições, e mesmo algumas definições formais se fundamentam na intuição. Também aprendemos que a abordagem genética feita por Kant – ou seja, a abordagem que leva em conta aspectos da evolução, e, portanto, a história e a cultura – é muito importante para explicar grande parte do desenvolvimento da Matemática, e seria muito útil que historiadores da Matemática e matemáticos compreendessem isso e abandonassem a noção de que a história é feita apenas por personalidades geniais.

No entanto, a intuição não é uma camisa de força, e me parece que a Matemática tentou ser fiel a ela até que essa fidelidade resultou em contradições com outras verdades aceitas. Quando não estamos lidando com infinitos, infinitésimos e dimensões maiores do que três, frequentemente nossa intuição é plenamente confirmada.

Mas também aprendemos que a insistência de Bolzano em provas que não utilizassem a intuição e as noções, que para Kant todo ser humano teria de forma inata – as noções de espaço e tempo – foi o que permitiu o desenvolvimento da Matemática pura e sua fundamentação, e que a afirmação kantiana de que a Matemática seria sintética, *a priori* mostrou-se exagerada. De fato, a abordagem que Bolzano deu à Matemática foi importante para corrigir os erros de fundamento de sua época, cuja abordagem kantiana não resolvia nem apontava caminhos férteis para resolver.

O método utilizado para esta fundamentação, a aritmetização, resultou numa grande abstração. Lidar com objetos que não existem no mundo físico, psíquico e nem mesmo têm a possibilidade de existir em lugar algum, só é possível por meio da abstração. E a capacidade de abstração e generalização, ligadas à capacidade de relacionar diferentes ramos do conhecimento, é, talvez, o maior legado que a Matemática tem, e aquilo de que as outras áreas da ciência, e a Filosofia, mais emprestam da Matemática.

Mas Bolzano acreditou que a conexão entre objetos e fatos com a Matemática seria natural e óbvia, e não escolhida ou construída, como é aceito na Matemática pura moderna. Além disso, Bolzano não compreendeu – como Kant o fez – o papel da experiência para a comunicação.

No entanto, a busca da ordem objetiva foi importante para o desenvolvimento da Matemática, e da Filosofia. Se de um lado Kant enfatizou corretamente que nós só temos conhecimento das coisas por meio de representações que fazemos a partir da nossa estrutura, Bolzano afirmou corretamente a necessidade de fazer representações que se adéqüem, o máximo possível, ao que ele acreditava ser a ordem objetiva das coisas, e, assim, contribuiu para a revalorização da noção kantiana de relação.

Assim, acreditamos que Kant e Bolzano, intuição e conceito, e Epistemologia e Semântica, são complementares, como vimos em Lalande.

Por fim, esperamos que este artigo contribua para, de um lado, para inicialização do estudo, no Brasil, das obras de Bolzano, bem como da tradução de sua obra para o português; e a continuidade da reflexão com base em estudos históricos e filosóficos sobre a relação entre intuição e conceito.

Referências

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 4. ed. Tradução de BOSI, A. São Paulo: Mestre Jou, 2000.

BOLZANO, B. **Las paradojas del infinito**. México: Servicios Editoriales de la Facultade de Ciencias/UNAM, 1847/1991.

______. **Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege**. Tradução inglesa por S. Russ, **Historia Mathematica, Historia Mathematica**, n. 7, p. 156-185, 1817/1980.

______. **Der Binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen**. Praga: C. W. Enders, 1816/2004.

______. **Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege**. Prague: Gottloeb Hass, 1817/1905. Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, Leipzig, v. 153, p. 343-395.

______. **Wissenschaftslehre**, 4 v. (Sulzbach). Sulzbach: Wolfgan Schultz. Reprint Scientia Verlag Aalen, 1837/1981.

______. **Theory of science**. TERRELL, B. Boston and Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

BROUSSEAU, G.; OTTE, M. The Fragility of Knowledge. In: A Bishop et. al. (orgs), **Mathematical Knowledge**: Its Growth through Teaching, Kluwer Dordrecht 1991, 13-38.

CLÍMACO, H. A. **Prova e Explicação em Bernard Bolzano**. Dissertação (Mestrado em Educação) – IE/Universidade Federal do Mato Grosso, Brasil.

DEDEKIND, R. **Was sind und was sollen die Zahlen?** Tradução inglesa de W. Beman. Courier Dover Publications, 1963.

GEORGE, R.; RUSNOCK, P. Resenha de "The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station", de Albert Coffa. In: **Philosophy and Phenomenological Research**, v. LVI, n. 2, 1996.

HANNA, G. **Rigorous Proof in Mathematics Education**. Toronto: OISE Press, 1983.

KANT, I. ***Crítica da razão pura***. 5. ed. Tradução de M. P. Santos; A. F. MORUJÃO. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

KLEIN, F. (1887). The arithmetizing of mathematics. 965-71. *In*: EWALD, W. B. **From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 1996, v. 1.

LALANDE, A. **Vocabulário Técnico e Crítico da Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

LAPOINTE, S. Introduction: Bernard Bolzano: contexte et actualité. **In**: LAPOINTE, S. **Bernard Bolzano***:* philosophie de la logique et théorie de la connaissance. **Philosophique** v. 31, p. 3-17. Printemps: 2003,.

OTTE, M. **B. Russell's Introduction to Mathematical Philosophy**. Educação matemática pesquisa, São Paulo - SP - Brasil, v. 3, n. 1, p. 11-55, 2001.

______. Certainty and explanation in mathematics. **In**: INTERNATIONAL CONFERENCE PERSPECTIVES ON MATHEMATICAL PRACTICES. Bruxelas, 26 a 28 de março de 2007. **Anais...** Bruxelas, 2007.

RUSNOCK, P: Bolzano and the traditions of analysis. In: KÜNNE, W.; SIEBEL, M.; TEXTOR, M. **Grazer Philosophische Studien, Internationale Zeitschrift für Analytische Philosophie**. n. 53, p. 61-85, 1997.

SCHMITT, A. **Die Moderne und Platon**, Editora Metzler, Tuebingen/Alemanha 2008).

SEBESTIK, J. **Logique et mathématique chez Bernard Bolzano**. Paris: Librarie Philosophique J. Vrion, 1992.

Recebimento em: 05/09/2008.
Aceite em: 27/11/2008.