# Que formação de professores de modo a assegurar que todos os alunos aprendem Matemática?

## What teacher education to ensure that all students learn Mathematics?

Maria de Lurdes SERRAZINA[1]


### Resumo

Este artigo pretende, partindo de uma experiência de formação com professores dos primeiros anos, focada no ensino exploratório e no desenvolvimento do raciocínio matemático, discutir o conhecimento dos professores para promover a aprendizagem dos alunos. Usa uma abordagem qualitativa-interpretativa e os dados recolhidos sujeitos a análise de conteúdo. A interligação entre a teoria e a prática presente nas tarefas de formação parece ter um forte contributo para que as professoras concretizem nas suas práticas letivas a resolução de uma tarefa exploratória, identifiquem os processos de raciocínio envolvidos e ações do professor presentes, alargando assim o seu conhecimento matemático e didático.


**Palavras-Chave:** Formação de Professores. Raciocínio Matemático. Ensino Exploratório. Conhecimento do Professor.


### Abstract

This article intends, from a teacher education experiment carried out with early years teachers, focused on exploratory teaching and the development of mathematical reasoning, to discuss teacher's knowledge to promote students' learning. It uses a qualitative-interpretative approach, with the collected data subject to content analysis. The interconnection between theory and practice present in training tasks seems to have a strong contribution for teachers to carry out in their teaching practices the resolution of an exploratory task, identify the reasoning processes involved and the teacher's actions present, thus expanding their mathematical and didactic knowledge.


**Keywords**: Teacher Education. Mathematical Reasoning. Exploratory Teaching. Teacher Knowledge.

[1] Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres (UK). Professora Coordenadora Aposentada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal. Membro integrado da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3781-8108. E-mail: lurdess@eselx.ipl.pt

# Introdução

Aprender Matemática depende fundamentalmente do que se passa na sala de aula, quando professores e estudantes interagem com base no currículo. Sabe-se que o processo de aprendizagem da matemática é um processo ativo no qual cada estudante constrói o seu conhecimento matemático a partir das experiências pessoais, a par do retorno dos seus pares, de professores e de outros adultos. Assim, o ensino deve envolver os estudantes numa aprendizagem significativa proporcionando-lhes experiências pessoais e com os seus pares, capacitando-os para "verem o sentido das ideias matemáticas e para raciocinar matematicamente" (NCTM, 2017, p. 5).

Nesta perspectiva, as aulas de matemática devem centrar-se em envolver os estudantes na resolução e na discussão de tarefas promotoras do raciocínio e da resolução de problemas, contrariando a crença de muitos pais e educadores que os estudantes devem ser ensinados como eles o foram recorrendo à memorização de factos, fórmulas e procedimentos, praticados repetidamente (NCTM, 2017). Daí a importância do professor desenvolver uma prática de ensino exploratório – prática complexa, em particular porque implica a dinamização e gestão das discussões matemáticas coletivas e implica diferentes papéis para professores e estudantes (Ponte, 2005).

Neste artigo começo a discutir o que entendo por práticas de ensino exploratório e como podem ser concretizadas na prática dos professores. Abordo ainda aspetos relativos ao raciocínio matemático e à formação de professores. O artigo foca-se numa experiência de formação desenvolvida no âmbito do projeto REASON (Raciocínio matemático e formação de professores). Este projeto, desenvolvido nos últimos anos, incluía uma experiência de formação na qual os professores participantes tinham de conduzir na sua prática letiva (*Levar à prática*) tarefas promotoras do raciocínio matemático e apresentar os resultados dessa experiência aos seus colegas na sessão de formação seguinte. Centro-me na formação dirigida a professores dos primeiros anos (1.º ao 6.º ano de escolaridade) tendo como foco o trabalho desenvolvido por um grupo de quatro professoras do 1.º CEB (1.º ciclo do ensino básico – 1º ao 4º ano). Procuro identificar o conhecimento relativo aos processos de raciocínio matemático que os professores identificaram nos seus estudantes, bem como potencialidades deste tipo de formação, com uma forte interligação entre a teoria e a prática e com foco na aprendizagem dos alunos.

## Práticas de ensino exploratório

O ensino exploratório distingue-se do ensino direto pelos papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos, pelas tarefas que são propostas e a forma como são geridas e pela comunicação que é originada na sala de aula (Ponte, 2005). Numa abordagem exploratória do ensino da Matemática os estudantes têm um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização das estratégias de resolução (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020); os estudantes têm um maior protagonismo na exploração das tarefas e na comunicação do seu raciocínio matemático passando a ser os atores-chave na sala de aula (Ponte, 2005).

Para Smith e Stein (2011), o professor passa a preocupar-se com o que estão a pensar; como estão a dar sentido ou não aos conteúdos que estão a ser trabalhados; como pode a sua compreensão matemática ser ampliada durante aquela aula. O que implica um diferente papel para o professor, nomeadamente tem de selecionar tarefas adequadas, determinar quando e como questionar os estudantes de modo a alargar o seu pensamento e decidir quando e como envolvê-los em discussões produtivas (Ellis; Ozgur; Reiten, 2019). O professor tem também de instituir um ambiente de sala de aula propício à reflexão e participação dos estudantes, em particular nos momentos de discussão coletiva (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020).

Em particular, ao selecionar as tarefas o professor tem de ter em conta se a tarefa: (i) representa de forma apropriada os conceitos e processos subjacentes; (ii), tem potencial para ajudar os alunos a progredir na compreensão de o domínio particular em que estão a trabalhar; e (iii) estabelece conexões entre o que já sabem e o que irão aprender no futuro. Para isso, o professor tem de: (i) selecionar/adaptar tarefas com critério, sabendo que não basta sugerir boas tarefas — como são propostas e as condições da sua realização são fatores a ter em conta; (ii) ter uma visão crítica sobre os recursos, nomeadamente os livros didáticos; (iii) pensar estratégias da aula tais como materiais a utilizar, mas também, por exemplo, formas de representação a promover; e (iv) exigir rigor nessas representações, não esquecendo o nível etário dos alunos com que está a trabalhar (Canavarro, 2011).

Assim, no ensino exploratório, o professor tem de compreender que para *planificar* a atividade letiva não basta fazer uma listagem de tarefas (atividades de investigação, problemas ou exercícios), essas tarefas devem ter em conta os objetivos de aprendizagem para os seus estudantes, mas também como os objetivos para cada aula se ligam com os das aulas anteriores e com os das aulas seguintes. A planificação deve ainda antecipar os acontecimentos da aula, as formas como os estudantes responderão às tarefas propostas e como essas respostas podem ser usadas para promover os objetivos de aprendizagem. O professor tem de compreender que a exploração de uma tarefa deve incluir uma etapa final de reflexão: (i) sobre o desempenho dos estudantes e dificuldades ou questões colocadas; (ii) sobre os objetivos efetivamente atingidos (definidos ou não à partida); e (iii) sobre a adequação da tarefa e/ou ajustes a fazer (Serrazina, 2017).

Esta reflexão pós-aula deve ainda implicar que o professor: (i) se interrogue sobre as aprendizagens matemáticas que foram ou não realizadas pelos estudantes; (ii) compreenda a importância das decisões da aula e suas consequências nas aprendizagens dos estudantes; (iii) reconheça surpresas da aula e tente compreendê-las; (iv) identifique aspectos que dificultam o seu ensinar; (v) assuma fragilidades e procure superá-las; (v) adquira atitude profissional inquiridora e confiante.

## Que formação de professores?

Os professores e, em especial os do ensino elementar, devem ter oportunidades para aprofundar o seu conhecimento especializado de matemática, isto é o seu conhecimento matemático necessário para ensinar. Isto envolve o uso do conhecimento matemático "descompactado" que pode ser ensinado diretamente aos estudantes à medida que eles desenvolvem a compreensão (Ball; Hoover; Phelps, 2008). Um dos temas desse conhecimento, que é hoje parte integrante dos curricula de diferentes países a partir dos anos iniciais, é o raciocínio matemático, daí a necessidade dos professores desenvolverem o seu conhecimento sobre o tema (Lannin; Elliot; Ellis, 2011; Stylianides; Ball, 2008; Stylianides, A.; Stylianides, G., 2006).

O termo raciocínio matemático não é consensual na literatura, sendo por vezes considerado como sinônimo de pensamento matemático. Adoto a perspetiva menos abrangente de raciocínio matemático de Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) para quem "raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (p. 7). Jeannotte e Kieran (2017) consideram o raciocínio matemático como compreendendo dois aspetos importantes: o estrutural e o de processo. Com relação ao aspecto estrutural, este apresenta uma natureza estática e compreende os diferentes tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abdutivo (Jeannote; Kieran, 2017). Já o aspecto de processo apresenta natureza dinâmica e temporal e compreende vários tipos de processos. Os processos associados ao raciocínio matemático identificados na literatura compreendem: "(i) buscar por semelhanças ou diferenças, que inclui generalização, conjetura, identificação de padrões, comparação e classificação; (ii) validação, ou seja, processos de justificação e prova; e (iii) exemplificação, que apoia os dois anteriores (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, p. 468).

O processo de generalização é fundamental em matemática quando se pretende fazer afirmações gerais sobre procedimentos, propriedades ou conceitos e o de justificar é central para validar matematicamente aquelas afirmações (Mata-Pereira; Ponte, 2018). Estes dois processos interagem um com o outro. Em muitas situações a linguagem usada na justificação tem de ser geral de modo que a sua aplicabilidade a todo o domínio seja clara. Desenvolver o processo de generalização desde o início da escolaridade é considerado crucial, enfatizando a construção de significados e a compreensão (Cusi; Malara, 2007; Kaput, 2000).

O *processo de generalização* ocorre quando um indivíduo identifica aspetos comuns em casos diferentes ou quando estende o raciocínio além do conjunto em que originalmente identificou os elementos comuns (Lannin; Elliot; Ellis, 2011). Para Jeannote e Kieran (2017) *generalizar* consiste em inferir afirmações sobre um conjunto de objetos, ou uma relação sobre esses objetos, a partir da análise de um subconjunto desses objetos. De acordo com Lannin, Elliot e Ellis (2011), os alunos generalizam quando se focam numa ideia ou num aspecto particular de um problema, pensam nele de uma forma mais abrangente e consideram duas etapas importantes: identificar os elementos comuns e alargar o domínio do qual se partiu.

Um outro processo fundamental em Matemática é o processo de *justificar*, considerado "um processo social e pode assumir dois formatos: (i) justificar a conjetura que surgiu no processo e (2) relatar a validade que altera o valor epistêmico" (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 12). No *processo de justificar* o estudante tem não apenas de mostrar que uma afirmação é verdadeira, mas fornecer razões pelas quais ela é verdadeira ou válida em todos os casos possíveis. Assim, o processo de justificar possibilita que os estudantes "não apenas desenvolvam suas habilidades de raciocínio, mas também seu entendimento conceitual" (Morais; Serrazina; Ponte, 2018, p. 556).

Para que os professores possam trabalhar com os seus estudantes de modo a desenvolverem os diferentes processos de raciocínio, não basta saberem identificá-los, é essencial que tenham uma compreensão profunda do significado de cada um de modo a conseguir estabelecer relações entre eles, alcançando deste modo um nível elevado de conhecimentos (Rodrigues; Brunheira; Serrazina, 2021).

Vários autores (por exemplo Francisco; Maher, 2011; Loong *et al.*, 2017) referem a necessidade de criar oportunidades para que os professores aprendam sobre como desenvolver o raciocínio matemático nos seus estudantes. Essas oportunidades ajudarão a alargar o seu conhecimento didático em como promover e encorajar o trabalho com o raciocínio nas suas aulas (NCTM, 2000). Se se pretende que os professores promovam a capacidade de generalizar dos seus estudantes, devem ser proporcionadas oportunidades para analisarem evidências desses processos durante a sua formação (Melhuish, Thanheiser, Guyot, 2020). Ao pensarem em como promover o desenvolvimento do raciocínio matemático nos seus estudantes, os professores têm de identificar (i) o potencial da tarefa, (ii) ações do professor facilitadoras e (iii) que conhecimento os seus estudantes já possuem sobre o assunto.

Para Herbert e Bragg (2021), o facto de os professores selecionarem tarefas que promovem processos de raciocínio, implementarem-nas na sala de aula e posteriormente refletirem sobre as produções dos estudantes com outros professores pode ser uma forma de alargar o seu conhecimento didático sobre como desenvolver o raciocínio matemático dos seus estudantes.

## Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa-interpretativa (Patton, 2002), incidindo nos processos e significados dos participantes. Foi desenvolvida no contexto de uma experiência de formação de professores, correspondendo ao 2.º ciclo de design de uma IBD (Investigação Baseada em Design) (Cobb *et al.*, 2003), onde participaram 19 professores lecionando nos seis primeiros anos de escolaridade. Esta experiência prevista para ser realizada presencialmente, acabou por acontecer on-line devido ao surto pandêmico, na segunda metade do ano letivo de 2020/2021, sendo a autora deste artigo uma das três formadoras.

A experiência foi composta por oito sessões, ao longo de quatro meses, sendo cada sessão de duas horas e trinta minutos. Envolveu a exploração e discussão de tarefas focadas nos processos de raciocínio, nas ações do professor para desenvolver os processos de raciocínio e nos princípios de elaboração de tarefas. As tarefas de formação englobam (i) análise de artigos de revistas profissionais sobre o tema, (ii) tarefas de matemática para alunos dos seis primeiros anos de escolaridade, e (iii) episódios de aulas envolvendo resolução de tarefas com alunos dos primeiros anos. Todas as tarefas foram inicialmente exploradas autonomamente pelos professores, organizados em quatro grupos, tendo sido discutidas posteriormente por todo o grupo. Nas sessões 1 a 3 foram abordados o significado de raciocínio matemático e os seus processos, articulando teoria e dados empíricos de episódios de sala de aula. Na quarta sessão, os formandos tiveram de selecionar, preparar e posteriormente conduzir uma tarefa com os seus estudantes (*Levar à prática I*) e na quinta sessão apresentaram uma análise crítica do trabalho realizado, com identificação dos processos de raciocínio presentes nas resoluções dos estudantes. A sexta sessão foi dedicada às ações do professor para desenvolver os processos de raciocínio dos estudantes (Mata-Pereira; Ponte, 2018) e aos princípios de elaboração de tarefas (Equipa de Coordenação do Projeto REASON, 2023). Por fim, as sessões 7 e 8 repetiram a abordagem realizada nas seções 4 e 5 (*Levar à prática II*).

Neste artigo serão analisadas a seleção, planificação e condução de uma tarefa (Tarefa dos Chupa-chupas – Quadro 1) selecionada por um grupo de quatro formandas, professoras do 1.º CEB, e realizada nas suas diferentes turmas, concretizando o *Levar à Prática II*. No apêndice 1 apresento a tarefa de formação, construída pela equipa do projeto a partir da tarefa apresentado no Quadro 1, e resolvida pelos formandos na segunda sessão de formação.

Quadro 1 - Tarefa dos Chupa-chupas

| |
|---|
| André e Rute receberam um saco de chupa-chupas. Partilharam os chupa-chupas entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram os seus amigos, Ana, Rui e António que também queriam chupa-chupas. Decidiram então partilhá-los novamente e sobraram 2 chupa-chupas. Quantos chupa-chupas podiam estar no saco? Explica como pensaste e justifica a tua resposta[2]. |

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sessão 7, os formandos deveriam selecionar uma tarefa, preferencialmente de entre as resolvidas durante a formação, justificarem a sua escolha, verificarem como respeita os princípios de elaboração de tarefas definidos no âmbito do projeto REASON e planificar a sua implementação nas suas turmas. A seguir deviam propor a tarefa nas suas turmas, procurando recolher o máximo de dados possíveis. O grupo tinha ainda de construir uma apresentação oral, apoiada por um conjunto de slides, e apresentá-la na sessão de formação 8. Esta apresentação deve identificar as ações do professor bem como os processos de raciocínio envolvidos nas resoluções dos estudantes, em especial os processos de generalizar e de justificar.

Os dados foram recolhidos através da gravação das discussões no grande grupo da formação e subsequente transcrição, bem como da recolha dos slides de apresentação, na sessão 8. Foram ainda incluídos dados obtidos da transcrição do trabalho do grupo na sessão 7, aquando da seleção da tarefa pelo pequeno grupo. As professoras adaptaram a tarefa aos diferentes anos de escolaridade que lecionavam (1.º, 3.º e 4.º anos). Neste artigo, por razões de espaço, limito-me aos dados correspondentes à turma do 3.º ano e às duas turmas do 4.º ano de escolaridade onde foi resolvida. Os professores envolvidos tinham mais de 10 anos de experiência e eram respeitados pelos seus pares. Todos os nomes são fictícios. Os dados foram sujeitos a análise de conteúdo (Bardin, 2010).

[2] Tarefa adaptada da tarefa "Lots of Lollies", disponível em: https://nrich.maths.org/2360

## Resultados

### Seleção da tarefa

Como referido, na sessão 7 os formandos tinham de selecionar uma tarefa para levarem à sua prática (*Levar à Prática II*) e analisá-la à luz dos princípios de elaboração das tarefas que tinham sido discutidos na sessão 6. As professoras começaram por recordar as diferentes tarefas que tinham sido trabalhadas nas sessões de formação tendo optado pela tarefa do Chupa-chupas pelas razões aqui expressas na voz de Catarina:

*Catarina – Então acho que sim, acho que pode ser. Acho que tem aqui a formulação de generalizações, não é? Porque eles têm que justificar que funciona sempre, portanto vai levar ali à experimentação, se calhar ao uso de contraexemplos se acharem que outros números dão e então basta um contraexemplo para deitar abaixo essa conjetura. Acho que tem potencial aqui.*

Selecionada a tarefa, prosseguiram com a sua análise à luz dos princípios de elaboração de tarefas, começando pelos princípios gerais: (i) permitir uma variedade de estratégias de resolução; (ii) permitir uma variedade de representações; e (iii) favorecer a reflexão sobre os processos de raciocínio.

*Susana – Agora temos que observar esta tarefa à luz dos princípios. Vamos começar pelos gerais.*
*Catarina – Então, "Variedade de estratégias de resolução".*
*Hélia – Tem muitas.*
*Catarina – Exato, no 1º ano, vão experimentar.*
*Heloísa – Sim, mas nunca se sabe por onde é que eles pegam.*
*Catarina – Depois, "Variedade de representações".*
*Heloísa. – Podem representar em expressões numéricas, podem fazer uns esquemas. Em tabela dá muito jeito? Não. Dá se for uma tabela, não com o número de pessoas.*
*Susana– Uma tabela em que eles vão colocando o número de pessoas, o número de chupas e o que é que sobra.*
*[...]*

*Hélia – [...] Sim, e esta também incentiva e favorece esta reflexão.*
*Susana – Isso sim, sem dúvida.*
*Heloísa – Eu pelo menos acho que tem as três, não é?*
*Susana – Sim*

Verificaram ainda os princípios específicos:

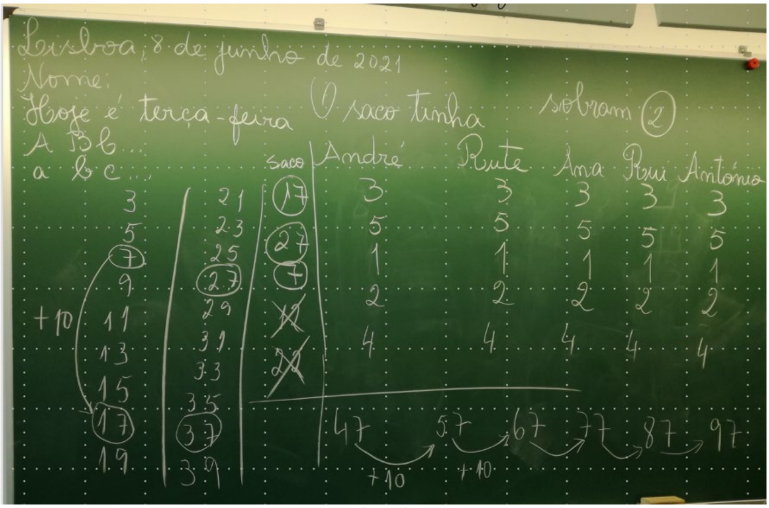
*Susana – Tem a generalização*
*Heloísa - Múltiplos de 5 ímpar mais 2. Esta não tem para promover a classificação, não.*
*[...]*
*Heloísa – O 8 (incentivar a justificação) pode ter.*
*Susana – Pois, eles ao início vão pensar só nos múltiplos de 5 e depois se calhar só mais para a frente é que vão ver que afinal são os múltiplos de 5, mas não podem ser os pares. E até lá chegarem, não sei se vão.*

Na adaptação da tarefa às respetivas turmas, as professoras decidiram que a tarefa a propor na turma do 1.º ano seria apresentada em duas fases: na primeira apenas aparecia a primeira questão e, só depois desta resolvida, passariam a apresentar a segunda parte. Concluíram assim que a tarefa cumpria as exigências colocadas pelas formadoras e nas turmas do 3.º e 4.º anos seria aplicada como enunciado do Quadro 1.

Cada uma das professoras implementou a tarefa na sua turma procurando recolher o maior número de dados, nomeadamente fazendo a gravação da respetiva aula e consequente transcrição e recolhendo todos os documentos produzidos pelos estudantes durante a resolução da tarefa. Com todos os dados recolhidos construíram em trabalho autónomo a apresentação que fizeram na sessão 8 e de que as figuras seguintes são parte integrante.

A Figura 1 corresponde ao resultado da discussão coletiva realizada na turma do 3.º ano. A sistematização é feita pela professora a partir das contribuições dos diferentes grupos de estudantes. Na opinião da professora a turma terá chegado a uma generalização quando "*concluiu que os números que constituem solução são os terminados em 7*".

Figura 1 - Resultado da discussão coletiva na turma do 3.º ano




Fonte: Dados da pesquisa.

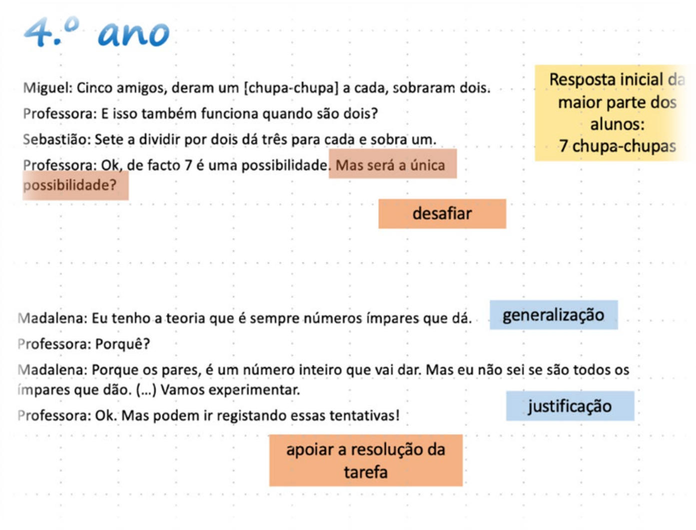
Como havia um tempo limitado para a apresentação, as professoras organizaram um conjunto de slides selecionando os dados que consideraram "*mais ilustrativos*" do que se passou nas duas turmas do 4.º ano e que correspondiam ao que lhes tinha sido solicitado.

Na Figura 2 procuram sintetizar com exemplos concretos como foi o início da resolução da tarefa, as reações da professora, classificando as suas ações. Na segunda parte do slide, para além das ações da professora, identificaram os processos de raciocínio envolvidos.

Aqui o grupo de professoras realça que "*o habitual é aceitar a primeira resposta dos alunos*", neste caso o 7 e ficarem-se por aí, considerando a tarefa resolvida. Daí a necessidade de incentivar a continuação da resolução.

A primeira intervenção da Madalena "*Eu tenho a teoria que é sempre números ímpares que dá*" é identificada como uma generalização, considerando que a justificação foi dada quando questionada pela professora. A última resposta da professora é considerada pelo grupo como um apoio à resolução da tarefa.

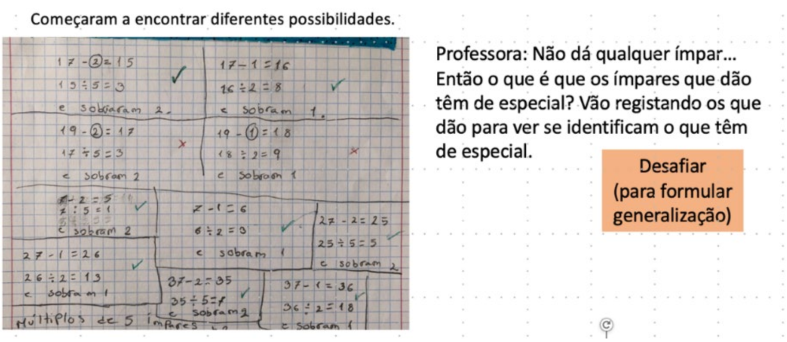
Figura 2 - Início da discussão coletiva




Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 3 apresenta as diferentes tentativas de resolução de um dos grupos de estudantes. O questionamento da professora desafiando os estudantes a irem mais além está expressa nas questões, mas também no incentivo que faz ao registo das diferentes possibilidades. Esta situação leva a que o grupo de estudantes conclua que os números que satisfazem a situação são os múltiplos de 5 ímpares adicionados de 2, que classificam como estando a generalizar.

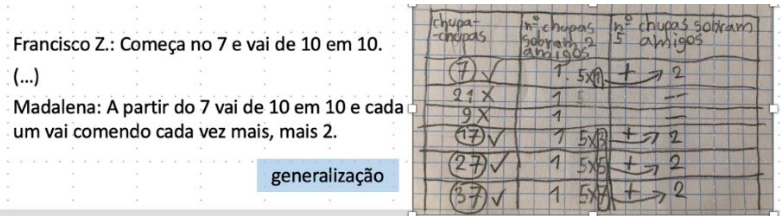
Figura 3 - Primeiras tentativas de resolução e desafios da professora




Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 4 apresenta a resolução do par Francisco e Madalena, acompanhado do respectivo diálogo. Aqui os estudantes construíram uma tabela tendo, aparentemente, começado por tentativa e erro, colocando números ímpares (7, 21, 9) e considerando os respectivos restos. Parecem ter percebido a regra que podiam utilizar e que as professoras classificaram como tendo chegado a uma generalização.

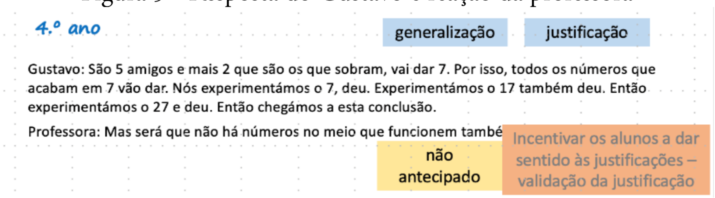
Figura 4 - A resolução do Francisco e Madalena




Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 5 a resposta de Gustavo evidencia que compreendeu a situação, estabelecendo uma generalização. No entanto, a professora questionou o estudante no sentido de ele justificar a sua solução. De salientar a referência à não antecipação desta questão, isto é, as professoras estão a referir que a questão não foi pensada aquando da planificação, enquanto outros o foram.

Figura 5 - Resposta do Gustavo e reação da professora




Fonte: Dados da pesquisa.

Continuando a aprofundar, selecionaram o diálogo com uma estudante, Sofia, concluindo que, mais uma vez o desafio colocado pela professora contribuiu para o estabelecer de uma generalização, construindo os estudantes a sua própria justificação (Figura 6).

Figura 6 - Desafio para chegar à generalização

Sofia: Eu descobri que eram mais dois, mais dois, mais dois... (...) e aqui [multiplicando], são todos ímpares.

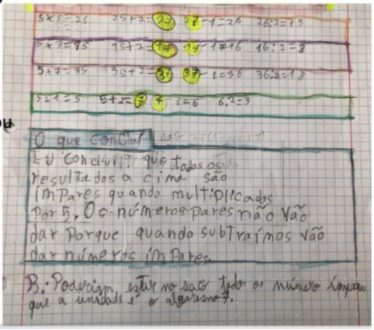
Professora: Vocês são capazes de dizer se o 5x8 vai dar?

Sofia: Não vai, porque é 8 e 8 é par. O 7 iria dar ou 9...

Professora: Mas aqui não fizeram 5 vezes 2... porquê?

Sofia: Não dava, dava 10 e mais 2 dava 12, não dava.

Desafiar (para formular generalização)



Fonte: Dados da pesquisa.

Por último, o grupo de professoras selecionou o slide da Figura 7, aproveitando a resolução de um dos grupos de estudantes, incentivando-os a que partilhassem com a turma a sistematização dos resultados (Figura 7). Para as professoras, através das ações de desafiar foi possível levar os estudantes a explicar à turma como chegaram à generalização, elaborado do ponto de vista simbólico na representação da expressão numérica correspondente. Para além de perceberem que são os números ímpares que são multiplicados por 5 e adicionados de 2, registram-no simbolicamente, o que não é muito usual para estudantes do 4.º ano.

Figura 7 - Desafios como chegar à generalização

*4.º ano*

**Discussão coletiva**

Desafiar (para formular generalização)

Professora: Como é que podem dizer que números são possíveis, sem ser dizendo "são aqueles que acabam em 7"?

*A partir da resolução de um grupo que identificou que cada amigo vai comendo mais 2 chupa-chupas, concluiu-se:*

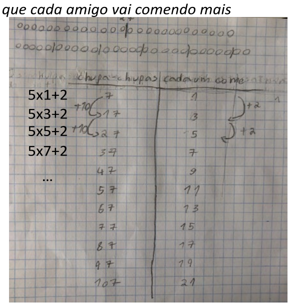
Francisco C.: Os números que multiplicamos por 5 são sempre ímpares.

(...)

Professora: E depois o que é que ainda faltava fazer?

Sofia: Mais 2.

Promover uma discussão que complemente e clarifique as contribuições dos alunos - generalização




Fonte: Dados da pesquisa.

Finda a apresentação das diferentes situações pelo grupo de formandos, uma das formadoras questionou o grupo sobre se a pergunta da Madalena (Figura 2) "*Eu tenho a teoria que é sempre números ímpares que dá*" seria uma generalização ou uma conjetura. Após algum diálogo concluíram que, inicialmente, se tratou de uma conjetura que conduziu a uma generalização.

A apresentação do grupo terminou com a identificação do que na sua perspectiva são os pontos fortes da tarefa: (i) Nível de desafio adequado; (ii) Simplicidade do enunciado; (iii) Abertura da tarefa; (iv) Articulação entre diferentes conteúdos; e (v) Promoção do raciocínio matemático.

## Discussão e conclusão

A forma como o grupo de formandas organizou a apresentação das suas experiências de sala de aula evidencia um conhecimento bastante forte dos processos de raciocínio matemático de generalização e justificação.

O relato da experiência foi organizado pensando numa progressão, partindo de situações de tentativa e erro (Figura 3 e Figura 4) para outras mais sofisticadas. Os dados mostram também que estes estudantes são capazes de descrever os processos usados evidenciando uma compreensão dos mesmos como o caso do Gustavo (Figura 5). Para isso, em cada uma das turmas, a respetiva professora parece ter tido um papel fundamental, conseguindo, através de ações de desafiar, que os estudantes avançassem na resolução da tarefa.

De realçar ainda a preocupação das professoras ao selecionarem diferentes formas de representação, como uma sequência de tentativas (Figura 3) até uma representação em tabela (Figura 4). A representação ilustrada na Figura 6 corresponde a uma outra organização onde são visíveis as diferentes tentativas, as conclusões do grupo e por último a resposta à tarefa. A Figura 7 ilustra como um diferente questionamento da professora permitiu que os estudantes evoluíssem para uma escrita "*mais matemática*", no dizer das professoras, que "*pode conduzir a uma expressão geral*". Porque as professoras colocaram os desafios adequados em cada caso, é visível a compreensão que os estudantes parecem ter da situação.

A experiência de formação pretendeu criar oportunidades de aprendizagem para professores como desenvolver o raciocínio matemático nos seus estudantes (Francisco; Maher, 2011; Loong *et al.*, 2017). As professoras parecem ter aproveitado bem essas oportunidades quando justificam a seleção da tarefa a levar à prática, identificando os processos de raciocínio matemático envolvidos. A oportunidade que tiveram de trabalhar a tarefa de formação (Apêndice 1) na sessão 2 de formação, bem como outras tarefas de formação (Melhuish, Thanheiser, Guyot, 2020) constituiu um importante contributo para a apropriação do conhecimento matemático e didático das professoras sobre o tema (Herbert; Bragg, 2021), como afirmam nas suas reflexões finais.

Os professores precisam de ter uma compreensão profunda da matemática que ensinam que não se limite a um conhecimento tácito do tipo saber fazer, mas que se traduz num conhecimento explícito (Ball, 1991). Para isso as tarefas de formação têm de incluir análise de episódios com alunos a resolver as tarefas ou as próprias resoluções dos alunos, mas também a identificação dos aspetos matemáticos nelas envolvidos, de modo que experimentem o conhecimento e a "vivência pessoal" dos processos e da natureza da atividade matemática. Para além disso, o experimentarem na sua prática letiva essas tarefas o que pressupõe a sua planificação, concretização e reflexão posterior, trazendo de volta à formação essa experiência para ser discutida e refletida com os seus pares parece ser crucial.

**Agradecimento:** Este artigo foi apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (Projeto IC&DT–AAC 02/SAICT/2017 AND PTDC/CED-EDG/28022/2017).

## Referências

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.

BALL, D. L. Research on teaching mathematics: Making subject-matterknowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), **Teachers'**

**knowledge ofsubject matter as it relates to their teaching practice.** Greenwich: JAI. p. 1-48, 1991.

BALL, D. L.; HOOVER, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Jornal of Teacher Education**, v. 59, *n.* 5, p. 389-407. 2008. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**, 4. ed. Lisboa: Edições 70, 2001.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; Lehrer, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 9–13. 2003. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. Educação e Matemática, v. 115, p. 11-17, 2011.

CUSI, A.; MALARA, N. A. Approaching Early Algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. **Quadrante**, Lisboa, v. 16, n. 1, p. 57–80, 2007 https://doi.org/10.48489/quadrante.22812

ELLIS, A.; ÖZGUR, Z.; REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 31, n. 2, p. 107-132, 2019 https://doi.org/10.1007/s13394-018-0246-6

EQUIPA DE COORDENAÇÃO DO PROJETO REASON. Princípios para a elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos. In PONTE, J. P. (Org.). **Raciocínio matemático e formação de professores**. Ebook. Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. 1.ª edição, p. 99-107, 2023.

FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Teachers attending to students' mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 1, p. 49–66. 2011. https://doi: 10.1007/s10857-010-9144-x

HERBERT, S.; BRAGG, L. A. Elementary teachers' planning for mathematical reasoning through peer learning teams. **International Journal for Mathematic Teaching and Learning**, v. 22, n. 1, p. 34-43, 2021.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LOONG, E. Y-K; VALE, C.; HERBERT, S.; BRAGG, L. A.; WIDJAJA, W. Tracking change in primary teachers' understanding of mathematical reasoning through demonstration lessons. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 19, n. 1, p. 5–29, 2017.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new Algebra with understanding**. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 2000.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018. https://doi:10.1590/19804415v32n62a02.

MELHUISH, K.; THANHEISER, E.; GUYOT, L. Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: justification and generalization. **Journal of Mathematics Teacher Education,** v. 23, n. 1, p. 35-67, 2020.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, p. 552 - 570, 2018.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) **Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. 2017.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, Va: NCTM, 2000.

PATTON, M. **Qualitative research & evaluation methods** (3rd ed.). Saint Paul, MN: Sage. 2002

PONTE, J. P. Gestão curricular. In GTI (Org.). **O Professor e o Desenvolvimento Curricular** Lisboa:APM, 2005, p.11-34.

PONTE. J. P.; QUARESMA, M; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?". **Educação e Matemática**, n. 156, p. 7-11, 2020.

RODRIGUES, M.; BRUNHEIRA, L.; SERRAZINA, L. A framework for prospective primary teachers' knowledge of mathematical reasoning processes. **International Journal of Educational Research,** v. 107, 101750-101761, 2021. https://doi.org/10.1016/ j.ijer.2021.101750

SERRAZINA, M. L. Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), **A prática dos professores: planificação e discussão coletiva na sala de aula** Lisboa: APM, p. 9-32, 2017.

SMITH, M. S.; STEIN, M. K. **5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions**. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

STYLIANIDES, A. J.; BALL. D. L. Understanding and describing mathematical knowledge for teaching knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 11, n. 4, p. 307–332, 2008.

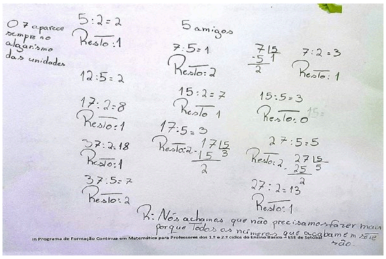
STYLIANIDES, A. J; STYLIANIDES, G. J. Content knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), **Proceedings of the 30th PME International Conference**, v. 5, PME, p. 201–208, 2006.

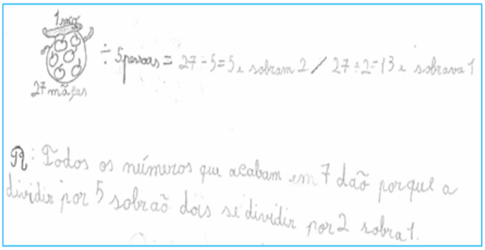
# Apêndice 1

**Tarefa de formação:**

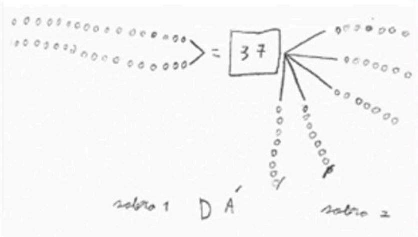
1. Resolva a tarefa.

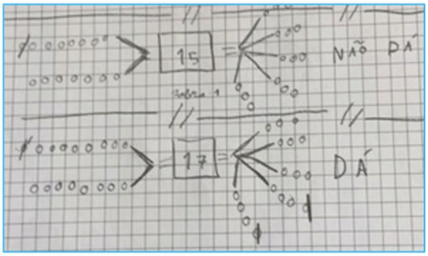
2. Analise as resoluções de alguns alunos do 5.º ano e os processos de raciocínio associados a essa resolução.




| Nós acabámos por não precisar de fazer mais, pois que todos os números que acabam em 7, dão. | Todos os números que acabam em 7, dão.porque ao dividir por 5 sobram 2 e ao dividir por 2 sobra 1. |
|---|---|




3. Identifique os processos de raciocínio que usou na sua resolução e compare-os com os usados por estes alunos.

| Resoluções | Processos de raciocínio |
|---|---|
| Maria: Podem estar 7 rebuçados. | Exemplificar: Maria dá um exemplo. |
| António: Podem estar 7, 17 e 27. Podem estar todos os ímpares. | Exemplificar: António dá três exemplos que parecem ajudar no processo de generalizar.<br><br>Generalizar: António identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números ímpares. |
| Miguel: Podem estar 7, 17 e 27. Podem estar todos os números que terminam em 7. | Exemplificar: Miguel dá três exemplos que parecem ajudar no processo de generalizar.<br><br>Generalizar: Miguel identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números terminados em 7. |
| Manuela: Não podem ser os números pares pois não sobra 1 quando são partilhados por 2. Não podem ser todos os ímpares porque, por exemplo, o 15 não dá pois não sobram 2. | Generalizar: Manuela identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio além do domínio em que foi generalizado.<br>Justificar: Manuela apresenta um argumento lógico baseado em ideias matemáticas e recorre a um contraexemplo para refutar uma afirmação. |
| José: Não podem ser pares porque sobra 1. Não pode ser 5 porque não sobram 2. Pode ser 7 porque sobra 1 e 2. | Justificar: José apresenta um argumento lógico baseado em ideias matemáticas.<br><br>Exemplificar: José dá um exemplo que parece ajudar no processo de justificar. |
| Catarina: Podem ser ímpares. Dos ímpares não podem ser os que terminam em 1, 3 e 5. Só os que terminam em 7. | Generalizar: Catarina identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números ímpares terminados em 7. |

Recebimento em: 13/06/2023.
Aceite: 29/07/2023.